JAMB Newsletter No. 30

数理生物学懇談会
ニュースレター

第30号

1999年12月

Japanese Association
for
Mathematical Biology

Newsletter編集局移転のお知らせ

10月14日に開かれた数理生物学懇談会総会で，今後2年間のNewsletter編集局を，北海道地区の皆さんにお願いすることが決まりました：

編集委員長　西村欣也さん（北海道大学水産学部）
編集委員　　菅野泰次さん（北海道大学水産学部）
　　岸道郎さん（北海道大学水産学部）
　　松石隆さん（北海道大学水産学部）
　　高田壮則さん（北海道東海大学国際文化学部）
　　原登志彦さん（北海道大学低温科学研究所）

なお，総会後の新編集局と旧編集局との間の話し合いの中で，原登志彦さんにもぜひ加わっていただきたいということになり，ご本人の了解も得られましたので，biomathを通して会員の皆さんにもご連絡を差し上げた次第です．

本号（第30号）から，新編集局の編集によるニュースレターをお届けすることになりました．Newsletterについてのご意見や原稿の投稿などは，新しい編集局の方へお願いします．連絡先は，裏表紙見返しに掲載されています．

なお，今回の移転はNewsletter編集局だけで，事務局は残り1年間を，今まで通り静岡大学工学部システム工学科のメンバーで運営されます．会の運営に対するお問い合わせやご意見は竹内まで，会費納入に関するお問い合わせは吉村まで，住所変更・入会希望は宮崎まで，それぞれお願いします．

数理生物学懇談会事務局
〒432－8561　静岡県浜松市城北3－5－1
静岡大学工学部システム工学科

事務局長　竹内康博　TEL&FAX: 053-478-1200
　　e-mail: y-takeuchi@eng.shizuoka.ac.jp
財務担当幹事　吉村仁　TEL&FAX: 053-478-1215
　　e-mail: jin@sys.eng.shizuoka.ac.jp
会員情報受付　宮崎倫子　TEL&FAX: 053-478-1224
　　e-mail: rinko@sys.eng.shizuoka.ac.jp
　　泰中啓一　TEL&FAX: 053-478-1228
　　e-mail: tainaka@sys.eng.shizuoka.ac.jp
　　守田智　TEL&FAX: 053-478-1226
　　e-mail: morita@sys.eng.shizuoka.ac.jp
　　佐藤一憲　TEL&FAX: 053-478-1212
　　e-mail: sato@sys.eng.shizuoka.ac.jp

数理生物学懇談会総会報告

静岡大学　竹内康博

第9回数理生物学シンポジュームは、195名の参加者で、盛会のうちに終了できました。数多くの学生達が参加でき良かったと思います。また，ポスターセッションも当日まで参加者を募集し、28名(うち当日飛び入り13名)の発表があり、初めての取り組みとしては良かったのではないかと考えています。シンポ要旨の締め切りがシンポより3ヶ月も前ですので、締め切り以降で得られたおもしろいことを発表する場にも利用していただけたと考えます。なお、シンポジューム開催中に数生懇加入者様に心からのお礼を申し上げます。

以下，10月14日に行われた総会の報告をいたします。

議題

1. ニュースレター新編集局の承認

編集委員長:西村欣也氏，編集委員:菅野泰次氏，岸道郎氏，松石隆氏(以上，北大水産部)、高田壮則氏(北海道東海大学)を承認した。なお、総会終了後北大低温研の原登志彦氏にもご協力いただけるとのご連絡を受けましたのでご了解下さい。2年間，編集局長でがんばっていただいた静大の佐藤さん、どうもありがとうございました。

2. 数生懇事務局員の補充

新局員として泰中啓一氏，守田智氏(静大)を補充することが承認された。これにより，今後1年間を竹内，吉村，佐藤，宮崎に上記2人を加えた6人体制で行っていきますので，宜しくお願いします。

3. 大久保賞選考委員の交代について

1年任期の重定氏にかわって難波氏を2002年10月までの選考委員とする事務局案が承認された。今後1年間は三村氏(2000年10月まで)、巖佐氏(2001年10月まで)、難波氏の3人体制です。

4. 数生懇(JAMB)とSMB(アメリカ中心)、ESMTB(ヨーロッパ中心)との国際交流について

(1)　2001年7月：JAMBとSMB共催でハワイで会議

(2)　2002年、ESMTBの会議(イタリア，ミラノ)にJAMBとSMBが後援の形で参加という原案が承認された。なお、2001年は通常の数生懇シンポを国際会議に置き換えるという方向が承認された。

(3)　2001年:ファンドが通ったら日－英共同研究集会を後援することを承認した。中部大の関村氏中心に中身について検討していくこととした。

5. 学生対象に学会賞を出す.

学生(パーマネントな職についていないもの)対象に学会賞を出して、若手の研究上の励みにするとの提案がなされ、承認された。詳細は事務局および運営委員会で検討することとした。

6. 第9回数生懇シンポのproceedingについて

今回のシンポジュームのproceedingを出版することについて事務局から提案がなされたが、経費の点からホームページ上で公開することとした。

7. 数生懇10周年記念特集について

数理生物学各分野で最近の発展を紹介し、数生懇及び数理生物学に対する関心を高めることを目的として雑誌「数理科学」で特集を組んでもらう件について承認された。今後「数理科学」と事務局とが交渉することとした。

8. その他

数生懇を日本学術会議の登録学術団体とするためには会員数を300名にする必要がある。現在249名であるが300名にするように努力すべきであるとの意見が出された。これに対して、数生懇設立の趣旨は学会にはないオープンなものを目指しているとの意見が出され、継続的に議論していくこととなった。

第9回数理生物学シンポジウム

皆様、以下のように、数理生物学シンポジウムが14－16日に東京大学大学院数理科学研究科(駒場)で開催され、15日にはポスターセッションに多数の参加を頂きありがとうございました。また、来年もポスターセッションを行う予定ですので、よろしくお願いいたします。

数理生物学懇談会事務局一同より(文責:吉村仁)

記

第9回数理生物学シンポジウムのポスターセッションの試みについて

数理生物学シンポジウムが14－16日に東京大学大学院数理科学研究科(駒場)で開催され、15日には、全く新しい試みとして、ポスターセッションを開催しました。ポスター発表は、今回当日まで参加を受け付け、全部で以下の28の講演が行われました。このうち、P13から以降は全て要旨集掲載後の参加受付で、とくに、当日受付がP13および、P17－P28までの13件でした。ポスター掲示は初日から最終日まで大会期間中で、半数くらいは3日間掲示をしてくださいました。

当日は、多数の参加者が全てのポスターの周りに集まり、活発に議論をしていました。とくに、2時間の討論時間の間は、殆どすべてのポスターが少なくとも数人の聴衆を集めていました。

私が今まで見てきた生態学会や動物学会のポスターセッションでは聴衆が偏り、多くの聴衆を集めるポスターがある反面、だれも聴衆のこないさびしいポスターがあるのが常でした。これに比較して、今回のポスターは聴衆の活発な議論といい、多くのポスターで皆さんが熱心に聞いている様子といい、大成功だったと思います。以下に最終的なポスター演題の目録を掲示します。

第9回数理生物学シンポジウムのポスターセッション目録
(15日　15:00－17:00　ポスターセッション)

P1:木崎伸也、香取眞理 (中央大学)
　ワタリバッタの相変異のモデル化

P2:瀬野裕美(奈良女子大学大学)、佐藤葉子(奈良女子大学)
　Galton-Watson分枝過程による姓の存続性に関する数理モデル解析:日本の姓の存続性

P3:吉田勝彦(東京大学)
　構成要素が進化する相互作用網における多様性変動の数値実験

P4:佐藤一憲(静岡大学)・松田裕之(東京大学海洋研究所)
　生息地の破壊による個体群の絶滅確率の推定

P5:○土居雅広、府馬正一、石井伸昌、坂下哲哉、宮本霧子、武田　洋、中村裕二(放射線医学研)、川端善一郎(京都大学)
　微生物制御実験生態系における個体群動態の環境負荷への応答特性モデル

P6:村西 秀規、竹内康博(静岡大学)
移動を伴うLotka-Volterraモデルの安定性解析
P7:稲田 喜信(東京大学先端科学技術研究センター)
魚群行動の安定性の評価
P8:田尾知巳、泰中啓一(静岡大学)
コンタクト パーコレーション プロセス:サイト過程
P9:泰中啓一(静岡大学)
囚人のジレンマゲームにおけるメタ個体群動態
P10:梯 正之(広島大学)
性行為感染症の数理モデル－簡単なモデルはどこまで有効か？－
P11:小林亮(北大), 本多久夫(兵庫大)
卵黄嚢表面における血管分岐系形成のモデル
P12:高木拓明, 金子邦彦(東大)
遺伝暗号系進化への相互作用的アプローチ
P13:稲葉寿(東京大学、数理科学)
「山口先生メモリアル」展示
P14:高松 敦子(理研), 藤井 輝夫(東大生研, 理研), 遠藤 勲(理研)
真正粘菌変形体による生きた結合振動子系の構築と時間遅れの効果
P15:中垣俊之(理化学研究所)、山田裕康(理化学研究所、北大・電子研)
迷路の中の粘菌行動
P16:石田好輝(豊橋技科大、知識情報工学系)
Nowak-MayのHIV-T細胞相互作用モデルと抗原多様性閾値について
P17:小野直亮(東京大学、広域システム、池上研)
原始細胞の発生と進化モデル
P18:橋本康(東京大学、広域システム、池上研)
Imitationによるheteroclinic chaosの摂動
P19:時田恵一郎(大阪大学、理学部)
Extinction and speciation in dynamical system of evolution
P20:松本亜沙子(東京大学院、総合文化、池上研)
完全変態類と不完全変態類の進化モデル
P21:林俊一(横浜国大院、今野研)
拡張された更新切断を用いたコンタクトプロセスの生存確率の評価
P22:宇野民幸(名古屋大院、理学)
「朝日新聞1999年7月28日夕刊記事」展示
P23:浦野将人(横浜国大院、今野研)
3種Lotka-Volterra格子モデルの相関不等式と共存・非共存
P24:川東真人(横浜国大院、今野研)
植生遷移モデルの密度分布と相関不等式
P25:小暮将規(横浜国大院、今野研)

方向性のあるパーコレーションのピボタルボンドについて
P26:高橋佐良人(横浜国大院、今野研)
Nonattractive確率セルオートマトンのHarris-FKG不等式とBFKL不等式
P27:小松正(北大院、地球環境、生態遺伝)
属のランクーサイズ関係はフラクタル分布を示す
P28:原田耕治(東京大学院、総合文化、池上研)
免疫ネットワークモデルにおける特異性の進化
以上28件です。

3種 Lotka-Volterra 格子モデルの相関不等式と共存・非共存

浦野　将人 (横浜国大, 工)[1], 今野　紀雄 (横浜国大, 工)[2], 佐藤　一憲 (静岡大, 工)[3]

(1) urano@lam.osu.sci.ynu.ac.jp
(2) norio@mathlab.sci.ynu.ac.jp
(3) sato@sys.eng.shizuoka.ac.jp

モデルの説明と概要.

Z^d上の各サイトは、3 状態をとりそれを 0,1,2 とする。サイト 0 は「0」党支持者であり、サイト 1,2 はそれぞれ「1」党支持者、「2」党支持者が存在する場合に対応する。このモデルは、連続時間のマルコフ過程で、ダイナミクスは以下のように表される。

(Rule 1) $0 \to 1$,　　遷移率 $n(1)$
(Rule 2) $1 \to 2$,　　遷移率 $n(2)$
(Rule 3) $2 \to 0$,　　遷移率 $n(0)$

ここで、$n(0), n(1), n(2)$ は、それぞれ着目しているサイトの最近接の 0,1,2 の数である。

「0」党支持者、「1」党支持者、「2」党支持者の 3 状態である投票者モデルダイナミクスを解析する。Monte Calro シミュレーションにより、以下の事柄について解析する。

(1) 2 次元正方格子モデルにおける、Harris-FKG 及び BFKL 不等式の解析
Harris-FKG 不等式は以下のようなタイプをいう。

$$\frac{\rho(ij)}{\rho(j)} \leq \rho(i) \qquad or \qquad \frac{\rho(ij)}{\rho(i)} \geq \rho(i) \qquad for \quad i,j \in \{0,1,2\}. \tag{1}$$

この不等式は、2 サイトの相関を表す。この式は、状態 i の確率と、状態 jの隣に状態 i が存在する確率を比較するものである。BFKL 不等式は以下のようなタイプをいう。

$$\frac{\rho(ijk)}{\rho(jk)} \leq \frac{\rho(ij)}{\rho(j)} \qquad or \qquad \frac{\rho(ijk)}{\rho(jk)} \geq \frac{\rho(ij)}{\rho(j)} \qquad for \quad i,j,k \in \{0,1,2\}. \tag{2}$$

この不等式は、3 サイトの相関を表す。この式は、状態 jの隣に状態 i が存在する確率と、状態 $j-k$の隣に状態 i が存在する確率を比較するものである。ここで、$\rho(i), \rho(ij), \rho(ijk)$ を $i,j,k \in \{0,1,2\}$ に対してそれぞれ、single density, doublet density, triplet density とする。i,j,kは、それぞれ隣り合ったサイトである。

(2) 1 次元正方格子モデルにおいて、相互作用する範囲（最近接の格子点の数）を変化させた時、定常状態において、共存するかしないかを調べ、その境界を確認する。

参考文献.

[1] V. Belitsky, P. A. Ferrari, N. Konno and T. M. Liggett, *Stoch. Proc. Appl.* Vol. 67, pp. 213-225, 1997.
[2] R. Durrett, *Lecture Notes on Particle System and Percolation*, Wadsworth, Belmont, 1988.
[3] R. Durrett, *Ten Lectures on Particle Systems*, St. Flour Lecture Notes, 1993.
[4] Y. Harada, H. Ezoe, Y. Iwasa, H. Matsuda and K. Sato, "Population Persistence and Spatially Limited Social Interaction," *Theor. Popul. Biol.*, Vol. 48, pp. 65-91, 1995.
[5] Y. Itoh, "On a Ruin Problem with Interaction," *Ann. Inst. Statist. Math.* Vol. 25, pp. 635-641, 1973.
[6] Y. Itoh, "An H-Theorem fro a System of a Competing Species," *Proc. Jpn. Acad.* Vol. 51, pp. 374-379, 1975.
[7] Y. Itoh, "Random Collision Models in Oriented Graphs," *J. Appl. Prob.* Vol. 16, pp. 36-44, 1979.
[8] N. Konno, *Phase Transitions of Interacting Particle Systems*, World Scientific, Singapore, 1994.
[9] T. M. Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, New York, 1985.
[10] H. Matsuda, N. Ogita, A. Sasaki and K. Sato, "Statistical Mechanics of Population," *Prog. Theor. Phys.* Vol. 88, pp. 1035-1049, 1992.
[11] K. Sato, H. Matsuda and A. Sasaki, "Pathogen Invasion and Host Extinction in Lattice Structured Populations, *J. Math. Biol.*, Vol. 32, pp. 251-268, 1994.
[12] K. Tainaka, "Lattice Model for the Lotka-Volterra System," *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 57, pp. 2588-2590, 1988.
[13] K. Tainaka, "Vortices and Strings in a Model Ecosystem," *Phys. Rev. E*, Vol. 50, pp. 3401-3409, 1994.
[14] A. Y. Tretyakov, V. Belitsky, N. Konno and T. Yamaguchi, *Mem. Muroran Inst. Tech.*, Vol. 48, pp. 101-105, 1998.
[15] V.Belitsky, P.A.Ferrari, N.Konno and T.M.Liggett: Stoch.Proc.Appl. **67** (1997) 213.
[16] R.Durrett, *Ten Lectures on Particle Systems* (St. Flour Lecture Notes, 1993)
[17] K.Sato and N.Konno: J.Phys.Soc.Jpn. **64** (1995) 1866.
[18] K.Sato, H.Matsuda and A.Sasaki: J.Math.Biol. **32** (1994) 251.
[19] R.Schinazi: J.Math.Biol. **34** (1996) 915.
[20] A.Y.Tretyakov, V.Belitsky, N.Konno and T.Yamaguchi: Mem. Murora Inst.Tech. **48** (1998) 101.

方向性のあるパーコレーションのピボタルボンドについて

小暮 将規、関根 雅人、今野 紀雄（横浜国立大学 工学部）

研究目的

パーコレーション（percolation）のモデルとは「浸透する現象」をモデル化したものである。このモデルは森林火災の広がり、金属と絶縁体の混合物などのさまざまな現象の簡単なモデルと考えることができる。本研究では、地面に水をこぼし地中に浸透するような、パーコレーションモデルに方向性をもたせたモデルを考える。

これらのモデルを考えるときに格子空間を用いる。２次元正方格子上の最近接格子点２点を結ぶ線分をボンド（bond）といい、その状態（open、closed）を変えたときにある事象の成立、不成立に影響を及ぼすボンドをピボタルボンド（pivotal bond）という。

本研究では方向性のあるパーコレーションにおけるピボタルボンドの空間分布を、コンピュータ・シミュレーションによって解析する。

研究方法

C 言語プログラミングによるシミュレーションをおこなう。

シミュレーションの方針は、n ステップ、ボンドが open になる確率 p の配置について、各ボンドがピボタルであるかをもれなく調べる。これを多数回繰り返し、各ボンドが合計何回ピボタルになったかを数え、その頻度をグラフであらわすものとする。

研究結果

シミュレーションによりステップ数が、１～１００の場合におけるピボタルボンドの空間分布を、ボンドが open になる確率 p を変えて求めた。また、あるステップで切ったときの断面のグラフも調べた。

結論

方向性のあるピボタルボンドについて、その空間分布をシミュレーションにより調べ、中心付近でピボタルボンドが多いという結果を得た。さらに、断面のグラフからピボタルボンドは、端から中心に向かって単調に増加しているわけではないことも分かった。また、確率 p を固定して、ステップ数を変化させた場合、ピボタルボンドの数の期待値はほぼベキ分布にしたがっているという結果も得た。

Nonattractive 確率セルオートマトンの Harris-FKG 不等式と BFKL 不等式

高橋 佐良人(1), Alex Yu. Tretyakov(2), 今野 紀雄(3)

(1) (横浜国大) sarato@lam.osu.sci.ynu.ac.jp
(2) (Massey 大) atretiak@massey.ac.nz
(3) (横浜国大) norio@mathlab.sci.ynu.ac.jp

Domany-Kinzel モデルは、１９８４年に Domany と Kinzel によって提案されたモデルであり、１次元の離散時間マルコフ過程と考えることができる。時間発展のルールは、ξ_n^Aを A ($\subset \mathbf{2Z}$) から出発する時刻 n での粒子の集合とすると、以下のように与えられる。
(1) $P(x \in \xi_{n+1}^A | \xi_n^A) = f(|\xi_n^A \cap \{x-1, x+1\}|)$
(2) ξ_n^Aを与えたときに、事象 $\{x \in \xi_{n+1}^A\}$ は独立とする。

$$f(0) = 0、f(1) = p、f(2) = q \qquad p, q \in [0,1]$$

また、このモデルで考える空間は、$S = \{s = (n,x) \in \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z} : n + x = \text{偶数}\}$, $\mathbf{Z}^+ = \{0,1,2,\ldots\}$. とする。$0 \le p \le q \le 1$ の場合にはこのモデルは吸収的 (attractive) と呼ばれ、そうでない場合には、非吸収的 (nonattractive) と呼ばれている。

今回は、このモデルに関する２つの相関不等式について、シミュレーションを行った。特に、吸収的な領域ではこれらの不等式は証明されているので、非吸収的な領域においても不等式が成立しているかどうか、ある特定の場合について調べてみた: $A, B \subset \mathbf{2Z}$ に対して、

- Harris-FKG タイプ

$$\nu(A \cup B) \ge \nu(A)\nu(B) \tag{1}$$

- BFKL タイプ

$$\nu(A \cap B)\nu(A \cup B) \ge \nu(A)\nu(B) \tag{2}$$

但し, $\nu(A) = P(\xi_n^A = \phi \text{ for some } n \ge 0)$.

◎結果：シミュレーションの結果、H-FKG タイプの不等式は成立することが確認できたが、BFKL タイプの不等式については、成立するとも成立しないとも断定できず、さらに精度をあげたシミュレーションを行いたいと考えている。

参考文献

[1] Belitsky,V., Ferrari,P.A., Konno,N., and Liggett,T.M.: *Stoch. Proc. Appl.* **67** (1997) 213.
[2] Domany,E. and Kinzel,W.: *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 198.
[3] Konno,N.: *Phase Transitions of Interacting Particle Systems* (World Scientific, Singapore, 1994).
[4] Tretyakov,A.Y., Belitsky,V., Konno,N., and Yamaguchi,T.: *Mem. Muroran Inst. Tech.* **48** (1998) 101.

第9回　数理生物学シンポジウムに参加して

電気通信大学大学院　神原研究室　吉澤　貴史
E-mail yoshi@glia.pc.uec.ac.jp

今回、数理生物学シンポジウムに参加させていただいたのですが、やはりかなり緊張しました。このシンポジウムより一ヶ月ほど先に、北海道で日本神経回路学会という学会で研究発表はしていたのですが、この時はポスターでの発表だったのでさほど緊張はしませんでした。

このシンポジウムでは、Oral 発表ということでしたので事前に発表練習をし、いろいろと質問の対策などをしていたのですが、それでも発表の前日はかなり緊張していました。そんな私の姿を見て研究室の先輩に、『勉強しに行くつもりで学会に行ってこい。』と言われ、少し緊張がほぐれました。

当日は、“タスクに依存した空間情報を表現するマップ形成における扁桃核の役割”という研究について発表させていただきました。この研究は、人がどのようにして位置や方向を認識し、またその行動(タスク)に対して価値判断を行う扁桃核の役割や脳内の動作原理を、ラットにおける生理学的実験結果をもとに、コンピュータシミュレーションによって調べる、という研究です。

非常に分かりにくい研究で、しかも発表時間も短いため理解していただけないだろうと思っていましたが、案の定、発表直後には多くの先生方から質問をいただき、自分の発表に対するテクニックの無さを身にしみて感じました。

今回のシンポジウムは、私にとってはまさに勉強をさせていただいたという気持ちでいっぱいです。この経験をもとに、今後もがんばって研究をしていきたいと思います。

第9回数理生物学シンポジウムの感想

静岡大学理工学研究科佐藤研究室

小中弘幸(M1)

今回が2回目となる数理生物懇談会でしたので，非常にリラックスした気持ちで参加させていただきました．前回のときはすごくまじめに講演を聞いていて、疲れてしまって最終日なんかはずっと眠かったのですが，今回はちからをセーブすることができました。最終日のカオス結合系というセッションが断然面白かったと思います。合原先生や金子先生など有名な先生方の講演を拝聴できてとてもラッキーだった気がします。ぜひ来年も参加したいと思います．

藤吉貞和(M1)

昨年は、初めての数理生物シンポジウムでしたので、正直言ってなんとなく講演を聞いていただけだったような気がしますが、今年は2回目ということもあり、自分なりの興味を持って講演が聞けました。僕は病気のモデルに興味があるので、特に梯先生のポスター発表は、興味深く聞かせていただきました。今回の経験を活かして今後の研究を進めていきたいと思います。

三宅健夫(M1)

発表を聞きまして、特にこの世界の研究は、実際のデータ、実際の現象と比べてはじめて、意味のあるものになるのだろうとあらためて感じました。これから、来年、院2年生になり、修論をやっていくなかでデータなどとの比較が行えればなあと考えています。

数理生物学シンポジウムに参加して

九州大学・理・生物　向　草世香

三回目の数理生物学シンポジウム参加で、なぜこのシンポジウムに参加するのか？その意味を三つ、改めて考えた。

一つは、もちろん自分の研究を発表するためである。研究者にとって、研究は、自らを語る唯一の言葉である。その言葉を覚え始めたばかりの大学院生には、研究発表は同じ分野に携わる方々への自己紹介の意味合いが強く、非常に緊張する場となってしまう。三年前、大阪で開かれた本シンポジウムで私は初めて口頭発表を行った。緊張のあまり、発表一週間前からなかなか寝付けず、当日の記憶も定かではない。場数を踏むにつれ、さすがに前日でもお酒の力を借りることなく眠れるようにはなったものの、やはり身の引き締まる思いで発表を迎える。そして、もっとわかりやすい発表、的確な応答ができるようにと反省する。

二つ目は、他の研究者の研究発表を聞くためである。昨年のどなたかの感想にも記してあったが、数生懇は本当にいろいろな分野の発表がある。普段なじみの少ない分野に触れることが出来るのも、このシンポジウムの良いところであろう。私の理解力では研究を真に理解するにはほど遠い。でも、少しずつ言葉が分かるようになってきた。そして発表者が提案した疑問を、自分なりに考える機会も少しずつ多くなっている。僅かではあるが、一年間の自らの進歩を確認することができ、とても嬉しい。

また、今年は初めてポスター発表が導入された。ポスター発表は、分からなければその場で質問が出来る。聞き手が分かるように言葉を選んで説明をしてもらえるため、大学院生には願ってもない機会である。何より、発表者と他の研究者との議論を耳にできることが一番重要なことだろう。時間の都合上、口頭発表では議論がままならない事も多い。ましてや、発表内容に対する他の研究者の意見を聞く機会はほとんどない。残念なことに全ての発表を聞くことは出来なかったが、結果だけでなく、数理モデルの本質を捉えた議論を聞くことが出来た有意義な時間であった。

最後は、他の研究者と触れあうためである。私にとって、シンポジウムで出会うほとんど全ての方は、「数理モデル」を通じて「何か」を理解しようと研究を重ねられてきた大大先輩である。その様々な価値観に触れることは私の貴重な財産となる。もちろん同年代の若手と交流することも忘れてはいません。

これからも、研究者としての自分を振り返る良い機会として、数理生物学シンポジウムに参加していきたいと思う。

♦

東京での3日間　マイナスα

奈良女子大学・理　大澤恭子(choko@ics.nara-wu.ac.jp)

数理生物の分野について、私はまだほんの少し勉強しただけなので普段は文献や周囲の人達の研究でしか数理生物学というものを感じることはありません。しかし、このようなシンポジウムに参加すると数理生物学という学問の多様さには驚かされます。研究対象の多様性もさることながら、その着眼点や手法にはそれぞれ発表された方々の個性があふれていて非常におもしろく、またそれらの考え方は私にとってすごく新鮮でとても勉強になりました。

私の研究に関しては多くの方々から意見や感想をいただき、まだ発表経験の少ない私にはそのことがとても印象に残りました。思ってもみなかった部分について質問が寄せられたり、少し話しあってみるとその方と私の、物事に対するとらえ方が全く違っていたり…と。私が伝えたかった研究内容がうまく伝わらなかったのかと不安にもなりましたが、その方々との話しの中でハッと気がつくことも多く、やはり先入観や思い込みだけで研究を進めるのではなく、いろんな方々の意見を参考にすべきなのだなあと感じました。数理生物学の多様性やその研究に携わる方々の様々な考え方を知る、という意味で今回のシンポジウムは非常に勉強になり、関係者の皆様、本当にありがとうございました。

ところで、私は今回のシンポジウムでたった一つだけ後悔していることがあります。それは、東大の学章入りみかさを買わなかったことです。1個たしか80円でとってもおいしそうだったなあ…、競争に弱い種 10 が東大みかさを食べたらきっとPowerUPして…などと考えながら修論作成に励む毎日です。

では、来年またお会いできる日を楽しみにしております。

初めてのシンポジウム

奈良女子大学理学部情報科学科4回生 自然情報学講座
岩花薫 亀澤英恵 小柴新子

初めてのシンンポジウムの参加に、卒論のテーマ決めですでにくたばっていた私達は「場違いなんちゃう？」といいつつ、はるばる奈良から4時間以上かけて東京に到着。東大駒場駅まではスムーズにいって調子に乗っていた私達でしたが、構内に入ってから道に迷ってしまいました。その時、ニュースレターを持っていたおじさんが前方を歩いていて付いていったのですが、何とその人も迷ったらしく途中で引き返してしまい、私は一人、途方にくれました。あのおじさんはちゃんと会場にたどりつけたのかと少し気にしながら、会場にたどり着くころには疲れ果てていました。

そんな中、緊張しつつ会場に入った私達にはいくつかの衝撃がありました。

第一の衝撃は、会場の雰囲気のラフさです。初めてのシンポジウム参加にちょっくら気合いを入れて'正装'（まではいかないが）らしきもので挑んだのですが、ジーンズの嵐にびっくり。かなりひけめを感じつつ3日間を過ごすことになりました。
初日の大雨に打たれ風邪をひいてダウンしたKさんも含め、初シンポジウムを満喫。といっても、シンポジウムの中身のことを聞かれると少し戸惑ってしまうのですが、とにかく感じたことは、プレゼンテーションしている内容はやはり斬新で、高度な専門知識を要するもので私達はこの分野のフレッシュマンなんだと、実感しました。

第二の衝撃としてこの会場には妥協という言葉が存在しないのかと、自分らの目を疑ってしまったほどの、時折出てくるあの激しい質疑です。プレゼンテーションの意味を充分に理解しかねている私達も、あれほどの探求心がこうした研究には必要なのだ、ということを充分に肌で感じとることができました。この教訓が卒論にいかされるといいのですが...

また、強く感じたことは、それぞれの問題の入口というのはとてもシンプルで基本的なことから始まっているということです。何気なく毎日私達が暮らしている日々の中にも少し視点を変えるとあれほどの考察、議論が隠され

ているものが存在しているのかと思うと、私達は何かしらの緊張感を持って生活するように指摘されているようにさえ感じました。
また、未知のものに手をつける時の感動が、プレゼンテーターからヒシヒシと伝わってきて、私達の好奇心まで掻きたてられているようでした。こういう意味でもシンポジウムを持つことはただオピニオン交換をするためだけではなく、他人のオピニオンを通して新しい発見が生まれる機会でもあり、さらに、いろんな角度からの問題提起を知ることによって自分の問題意識を客観視できる機会でもあるなと感じました。

そしてまた「数理生物学」といっても論文の内容は様々で、参加者の方々は各自専門分野をもっておられ、自分の専門分野からの視点で質疑がなされていたことは、私達が最も興味が持てた時間でもありました。
私達の立場としては質疑応答の時間をもう少し長めにとっていただいて充分な議論が見たかったものです。スケジュールが途中でずれてきたせいもあってか、質疑応答が中途半端で終ってしまう場面も多く少し残念に思いました。
反面、5分、10分の短時間で質疑応答ができるようなものではなく、その結果に至るには、膨大な量の過程を有しているのだということが伝わってきました。

このようにシンポジウムを初体験した私達は、未知なる世界を垣間見たと同時に数カ月後には自分達も、発表できるような論文を書かなくてはいけないという凄まじいプレッシャーを背に、奈良への帰途へとつきました。

数理生物学シンポジウムに参加した感想

横浜国立大学 工学部 応用数学（鵜飼・今野）研究室

斎藤 革子（助手）

初めての参加でしたので一つ一つの講演を興味深く聞きました。特に生態学に関する講演が多かったという印象が残っています。その中でもいろんな現象の要因を方程式に盛り込んでコンピューターシミュレイションで相図を描かせて現象と比較するという現象論的な講演が多かったと思います。一方でそういったモデル方程式をぎりぎりまで簡略化して数学的に解析するという試みも有ましたがそれでもそういった非線型方程式はコンピューターも併用して解析されているのを見ると数理生物学という分野の仕事の難かしさも垣間見た様な気がします。登壇者の多くは大学院生や若いスッタフであったのでこの分野の仕事が若い人達に担われていて今後の発展が期待できると思われました。会場の雰囲気はお互いに顔見知りだったり共同研究をしたことがあったりして、お互いの仕事について意見や情報を交換しあったりして、どの研究会でもそうなのでしょうが、参加したというだけで、今後の仕事にも弾みがつくといった様子が感じられました。

以上が私の数理生物学シンポジウムに参加した感想です。

林 俊一（M2）

*プレゼンテーションの作り方について

限られたスペースに要領よく図などを用いて自分の研究内容をわかりやすく記述することが大変難しいことがよくわかりました。参加されている研究者のかたがたのプレゼンテーションは写真やコンピュータグラフィックスなどを使ってまず自分の研究に興味を持たせる工夫がなされているのに感心いたしました。

*自分のポスターの前に立たれたとき

諸先生方および大学院生に私の研究していることを発表するとき、まずどのへんから話をはじめてよいのかとまどいました。話す段になると、よく理解していないところがたくさんあるのにおどろきました。また、質問にも十分に答えられなかった。ただ、貴重なご意見をいただけたことに感謝しています。

*研究者の講演を聞いて

生態学に関する研究がほとんどで、その現象を解析する道具として確率、確率微分方程式、統計をつかっていた。確率、確率微分方程式の基礎学力をしっかり身につけたいと思っています。

*懇親会に参加して

懇親会では、2,3 の研究者とお互いの研究内容について意見交換をした。そのとき、研究テーマに取り組んだ動機など、また今後どのような姿勢で研究に携わっていくのかなどの考えを聞けたのがよかった。

浦野 将人（M2）：自分の研究（3 種ロトカボルテラ格子モデル）の具体的な例を知ることができたのがとても有益になりました。また同様の研究をなさっている方から、ポスターセッション時に意見交換ができたのも、今後の研究に役立てるのではないかと考えます。

川東 真人（M2）：研究内容（植生遷移モデル）の意見交換を通じて、問題点などを明確に知ることができよい経験になりました。また、他人の研究内容を見ることで、自分の研究にたりないところ等がわかり、今後に生かしてゆきたいと思います。

江川 徹（M1）：ポスターセッションでは多くの方の研究内容にふれることができ、これから自分の研究テーマを決めるにあたり、いろいろと参考にしていきたいと考えています。

—以上—

無限粒子系の相関不等式とペア近似

今野 紀雄 （横浜国立大学 工学部）

第０章　はじめに

本解説では，無限粒子系のペア近似について，特にコンタクト・プロセスを例に，その相関不等式の立場から解説をおこなう．

まず最初に，無限粒子系に関して簡単に述べる．「無限粒子系」とは，各粒子が他の粒子と相互作用しながら時間発展する連続時間（あるいは離散時間）のマルコフ過程である．”無限”粒子系ではあるが，有限個の粒子を扱う場合もその中に含める．特に，考えているマルコフ過程が，d 次元の超立方格子などの格子の上で定義されるときは，数理生物学の分野で「格子モデル」と呼ばれるモデルのクラスに属する．無限粒子系に含まれる確率モデルには様々なものが存在するが，例えば，コンタクト・プロセス（contact process），投票者モデル（voter model），最近接粒子系（nearest-particle system），確率的イジング・モデル（stochastic Ising model），exclusion process 等がある．

１９６０年代後半から Spitzer、Dobrushin 等の確率論研究者によって研究が始められた無限粒子系の分野は，その後，数理生物学，統計物理学など，様々な分野との共同研究も活発に始まり，その論文数は指数関数的に増大し，現在全ての結果をきちんと理解してフォローすることは，非常に難しい状況になってきている．

その間，Liggett [1] や Durrett [2,3] によるテキストが登場し，記法の統一，知られている結果や未解決問題の整理がなされ，研究者にとって大変役に立った．また，ごく最近になって Schinazi [4], Liggett [5], Marro and Dickman [6] によるテキストも出版されている．

本稿では，我々の研究を中心に，無限粒子系の相関不等式を用いた近似法（これをここでは「相関不等式法」と呼ぶことにする）について主に解説をするが，特に，その第２近似に対応する広い意味での「ペア近似」に焦点を絞ることにした（第１近似に対応するのは，ある場合は「平均場近似」である）．従って，近似法によっては，第３近似，第４近似と続く場合もあるが，「ペア近似」との関係を明確にするため割愛した部分も多い．これらについては，参考文献を適宜参照して頂きたい．数学的に解けない，その意味で複雑な格子空間上の生物モデルや物理モデルの場合，よく行われている研究方法として，モンテカルロ・シミュレーション，平均場近似（第１近似），ペア近似（第２近似）の「３点セット」がある．密度や相関関数を調べるとき，ペア近似の方が平均場近似より，シミュレーションの評価としてよい場合が多いが，それに関する正当性も本稿で述べることにする．

ここで「ペア近似」について少し述べておく．よく用いられるペア近似は，例えば，

$$P(\bullet\circ\circ) = \frac{P(\bullet\circ)P(\circ\circ)}{P(\circ)}$$

のように書くことができる．この意味は，$\circ$ と $\bullet$ の２状態があって，１次元格子点上に，左から $\bullet\circ\circ$ という順に存在する確率 $P(\bullet\circ\circ)$ を，右辺のように，$\bullet\circ\circ$ を $\bullet\circ$ と $\circ\circ$ の２つのペアに分割し，それぞれの確率の積を，共通部分の真中に存在する状態の $\circ$ の確率で割ったものに一致すると仮定することである．何故「近似」かというと，一般の無限粒子系（例えば，本稿で主に扱うコンタクト・プロセス）ではこのような等号は成立しないからである（逆に，ペア近似が正しくなるようなモデル

を見つけることは，簡単ではない）．一方，

$$P(\bullet\circ\circ) \leq \frac{P(\bullet\circ)P(\circ\circ)}{P(\circ)}$$

のような不等式がモンテカルロ・シミュレーションによって予想され，実際にそれを仮定するとき，この不等式を「修正ペア近似」と呼ぶことにする.「修正」という意味は，等号を不等号に変え，その確率モデルに対してより詳しい情報を与えているからである．

この解説での“ペア近似”とは，厳密にいうと，上記の等号の近似である「ペア近似」と不等号の近似である「修正ペア近似」を含めた広い意味で用いる．従って，数学的にペア近似が正当化されたという意味は，正確に言うと，修正ペア近似に対応する不等式が証明されたということである．

しかし，第７章でも少し述べるがペア近似は場所だけではなく，$\bullet$ を粒子だと思うと，粒子間ペア近似のような近似もありえる（但し，この近似に関しては本格的な研究が始まったばかりである）．つまり，$\bullet$ に着目すると，

$$P(\bullet\circ\bullet\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet) = \frac{P(\bullet\circ\bullet\circ\circ\bullet)P(\bullet\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet)}{P(\bullet\circ\circ\bullet)}$$

のように，配置 $\bullet\circ\bullet\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet$ を $\bullet\circ\bullet\circ\circ\bullet$ と $\bullet\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet$ の粒子間のペアに分割し，それぞれの確率の積を，その共通部分の $\bullet\circ\circ\bullet$ の確率で割った近似である．このような近似もペア近似のクラスに入れてもよいのではないかと考えている．何故ならば，粒子間隔を新たな変数としてそのプロセスを考えると，隣り合う３つの状態をまさに最初のペア近似のように２つずつに分割しているのに他ならないからである（このような変換は exclusion process の解析で用いられる手法である）．

また，数理生物学の立場よりペア近似についての解説は，例えば，佐藤 [7]，巌佐 [8] を参照されたい．

さて，本解説では，無限粒子系のモデルとして，多くの研究者によって研究がなされているコンタクト・プロセスを例に話を進め，後半部分の第８章では，それ以外のモデルに関する結果についても，若干述べることにする．但し，定理などの証明は省略した．

ここで，本原稿の章立てを載せておく．

まず，コンタクト・プロセスをご存知の方も多いと思うが，ご存知無い方のために次の章で，コンタクト・プロセスについて概説する．

第１章　コンタクト・プロセスの定義と性質

1.1. 序説

コンタクト・プロセスは連続時間のマルコフ過程で，その取る値の空間は $\{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}$ で与えられる．但し，$\mathbf{Z}^d$ は d 次元超立方格子である．コンタクト・プロセスは１９７４年に Harris [9] によっ

て導入された．数学的な定義は以下の形式的な生成作用素 Ω によって与えられる．はじめての方には馴染みやすいものとは思われないが，相関等式の計算の説明で必要になるので書いておくことにする．各配置 $\eta \in \mathbf{Z}^d$ に対して，

$$\Omega f(\eta) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} c(x,\eta)[f(\eta^x) - f(\eta)],$$

ここで場所 x，配置 η に対する変化率（flip rate）は

$$c(x,\eta) = (1-\eta(x)) \times \lambda \sum_{y:|y-x|=1} \eta(y) + \eta(x),$$

である．但し，配置 η^x は $\eta^x(y) = \eta(y)$ $(y \neq x)$ かつ $\eta^x(x) = 1-\eta(x)$ で，配置 η に対して x の場所の値だけを変えたものである．また，$|x| = |x_1| + \cdots + |x_d|$. この定義に関する詳細は Liggett [1] の教科書の第 1 章に書かれている．ところで，特に 1 次元の場合，コンタクト・プロセスのダイナミクスは次で与えられる．

$001 \to 011$	遷移率	λ,
$100 \to 110$	遷移率	λ,
$101 \to 111$	遷移率	2λ,
$1 \to 0$	遷移率	1.

コンタクト・プロセスを伝染病の伝播の簡単なモデルと考えると，上記のダイナミクスは，健康な人は周りの（上の場合は 1 次元なので左右両隣の 2 箇所）に存在する伝染病患者の数に比例した遷移率で感染し（この比例定数が伝染率 λ と考えられる），一方，病人は周りの状況によらず遷移率 1（基準化されている）で自然治癒すると解釈できる．

また，病人の存在する場所の時間変化に着目して，コンタクト・プロセスを定義することもできる．即ち $\xi_t = \{x \in \mathbf{Z}^d : \eta_t(x) = 1\}$ を考えることによって定義する．このとき ξ_t は時刻 t で病人が存在する場所の集合を表わす．この方が，生成作用素を用いた定義より分かり易い．この ξ_t の時間発展は次で決まる．

(i) （感染過程）もし $x \notin \xi_t$ ならば，x の隣の場所に存在する病人の数の λ 倍の遷移率で，x にいる健康人は感染する．

(ii) （自然治癒過程）もし $x \in \xi_t$ ならば，x の場所の病人は遷移率 1 で自然治癒する．

一方，詳細は省くが，コンタクト・プロセスは，graphical representation によっても与えられる．この定義の方が生成作用素を用いる定義より，直感に訴えるので理解しやすいが，複雑な相関等式などを計算するには，上記の生成作用素を用いらざるを得ない．しかし，graphical representation による定義は，コンタクト・プロセスのパーコレーション（浸透）的な側面をとらえているので，方向性のあるパーコレーション・モデルと比較するときなどは，こちらの方が使い勝手がよい面もある．このように，どの定義を用いるかは，何を知りたいかに依存して決まる．上記の graphical representation については，例えば Durrett の教科書 [2,3] を参照のこと．

さて，$\mu S(t)$ を初期確率測度 μ としてもつコンタクト・プロセスの時刻 t での確率測度とする．但し，$S(t)$ は形式的な生成作用素 Ω に対する半群である．

上限不変測度（upper invariant measure）を次で定義する．

$$\nu_\lambda = \lim_{t \to \infty} \delta_1 S(t).$$

これは全ての点に病人が存在している状態から出発した不変（定常）測度のことである．この測度は，コンタクト・プロセスを研究する上で非常に重要な役割を果たす．また，この測度がきちんと定義されることは，コンタクト・プロセスの「吸収性（あるいは，吸引性）(attractiveness)」から保証され

ている．一般に変化率 $c(x,\eta)$ を持つプロセスが「吸収的（あるいは，吸引的）(attractive)」であるとは，全ての x に対して $\eta(x) \le \zeta(x)$ である任意の配置 η, ζ に対して次が成立することである．

$$c(x,\eta) \le c(x,\zeta) \quad 但し \quad \eta(x) = \zeta(x) = 0,$$
$$c(x,\eta) \ge c(x,\zeta) \quad 但し \quad \eta(x) = \zeta(x) = 1.$$

つまり，コンタクト・プロセスの場合，健康人が感染しやすいのは，病人が最近接に多い配置の方であることに対応する．また，この上限不変測度 ν_λ は平行移動不変である．他方，自明な不変測度は

$$\delta_0 = \lim_{t\to\infty} \delta_0 S(t)$$

で，下限不変測度 (lower invariant measure) と呼ばれる．これは，一旦全ての点が健康人だけになったら，その後ずっとその状態が続くことから明らかである．但し，全ての点に病人が存在する配置にしかマスを持たない δ_1 は，自然治癒作用があるので，コンタクト・プロセスの不変測度にはならない．

実は任意の確率測度 μ から出発したコンタクト・プロセスの不変測度が δ_0 と ν_λ の凸結合で表わされる．この結果は，「完全収束定理（complete convergence theorem)」と呼ばれる．

ρ_λ をある場所 x での上限不変測度 ν_λ で測った伝染病患者（粒子）の密度とする．即ち，

$$\rho_\lambda = E_{\nu_\lambda}(\eta(x)) = \nu_\lambda\{\eta : \eta(x) = 1\}.$$

この ρ_λ は場所 x には依存しない量である．それは，ν_λ が平行移動不変であることからわかる．この ρ_λ をこのコンタクト・プロセスの「秩序変数（order parameter)」として採用することにする．これを用いて「臨界値（critical value)」 λ_c を以下のように定義することができる．

$$\lambda_c = \sup\{\lambda \ge 0 : \rho_\lambda = 0\} = \inf\{\lambda \ge 0 : \rho_\lambda > 0\}.$$

驚くべきことに１次元の場合ですら λ_c と ρ_λ の厳密な量は知られていない．

本稿では主に，１次元の場合に限って話をすることにする．そこでまず１次元の場合の臨界値と秩序変数に関する厳密に（数学的に）知られている結果について述べる．

定理 1.1.
(1) $\rho_\lambda = 0. \quad (\lambda \le \lambda_c)$
(2) $\rho_\lambda > 0. \quad (\lambda > \lambda_c)$
(3) ρ_λ は λ の非減少関数.
(4) ρ_λ は $\lambda \ge 0$ で連続関数.
(5) $1.539 \le \lambda_c \le 1.942.$

上記の定理に関して幾つかコメントをする．(1) と (2) の結果は，$\lambda = \lambda_c$ のところを除いて，臨界値の定義から直ちにわかる．(3) と (4) に関しては，Liggett [1] の教科書の第６章を参照のこと．秩序変数 ρ_λ の 臨界値 λ_c での連続性に関しては，Bezuidenhout and Grimmett [10] によって証明された．(5) の臨界値に対する下限の値 1.539 は Ziezold and Grillenberger [11] による結果である．また，上限に関しては，１９７８年に得られた Holley and Liggett [12] による $\lambda_c \le 2$ が，当時としては驚異的に良い上限で，長らくベストな結果であった．しかし，１９９５年になって Liggett [13] 自身が，それを改良した上限の値 1.942 を得ることに成功した．コンピュータや近似計算を用いた臨界値の推定値は 1.649 である．これに関しては，例えば次を参照のこと：Konno and Katori [14]，Jensen [15]．また，上記の (1)-(4) に関しては高次元の $d \ge 2$ に対しても成立する．

今後しばらく１次元コンタクト・プロセスの臨界値の「下限」と秩序変数の「上限」に関する話をする．また，一般にそれら（あるいはその一方）を得る方法として以下の手法が知られている．(i)

Harris-FKG 不等式法（第 3 章），(ii) Katori-Konno 法（第 4 章），(iii) BFKL 不等式法（第 5 章），(iv) Ziezold-Grillenberger 法，(v) Griffeath 法．この解説では特に (i)〜(iii) に絞って話をし，(iv) と (v) に関しては，例えば Konno [16] を参照して欲しい．一方，1 次元コンタクト・プロセスの臨界値の「上限」と秩序変数の「下限」に関しては，例えば，以下の手法が知られている．(i) Holley-Liggett 法（第 6 章），(ii) Holley-Liggett 法に対応する相関不等式法（第 7 章）．最近の結果については Konno [17-21] も参照されるとよい．

また，コンタクト・プロセスを含んだ無限粒子系など，様々な確率モデルをわかりやすく解説した日本語の啓蒙書として，今野 [22,24,25]，香取 [23] がある．

第 2 章　相関等式

この章では，1 次元コンタクト・プロセスの相関等式について考える．まず，Y を $\mathbf{Z}$ の有限な要素を持つ部分集合全体とする．次に以下の相関関数を考える．任意の $A \in Y$ に対して，

$$\rho_\lambda(A) = E_{\nu_\lambda}\left(\prod_{x\in A}\eta(x)\right) = \nu_\lambda\{\eta : \text{全ての } x \in A \text{ に対して}, \eta(x) = 1\},$$

$$\overline{\rho}_\lambda(A) = E_{\nu_\lambda}\left(\prod_{x\in A}(1-\eta(x))\right) = \nu_\lambda\{\eta : \text{全ての } x \in A \text{ に対して}, \eta(x) = 0\}.$$

つまり，$\rho_\lambda(A)$ は，A の全ての点が病人である事象を上限不変測度 ν_λ で測った確率であり，逆に，$\overline{\rho}_\lambda(A)$ は，A の全ての点が健康な人である事象を上限不変測度 ν_λ で測った確率である．一般に，ある量に上付きの「$-$」を付けたときは，その量が健康人を対象にしていることを表す．

最初に $\rho_\lambda(A)$ に対する相関等式を考える．任意の $A \in Y$ に対して，$\prod_{x\in A}\eta(x)$ を η の関数として Ω に作用させると，以下の重要な定理が得られる．

定理 2.1. 任意の $A \in Y$ に対して，

$$0 = -\{|A| + 2\lambda b(A)\}\rho_\lambda(A) + \lambda\sum_{x\in A}\sum_{\substack{y\in\triangle A:\\ |y-x|=1}}\rho_\lambda((A\setminus\{x\})\cup\{y\})$$
$$+\lambda\sum_{x\in A}w_A(x)\rho_\lambda(A\setminus\{x\}) - \lambda\sum_{y\in\triangle A}w_A(y)\rho_\lambda(A\cup\{y\}),$$

但し，$|A|$ は A の要素の個数，$b(A)$ は A 内のボンドの個数，$\triangle A = \{y \in \mathbf{Z}\setminus A : |x-y| = 1$ を満たす $x \in A$ が存在する $\}$．また，$x \in \mathbf{Z}$ に対して，$w_A(x) = |\{y \in A : |x-y| = 1\}| \in \{0,1,2\}$，これは A 内の x の近傍の個数である．

次の記号を導入する．$\nu_\lambda(\bullet) = \rho_\lambda(\{0\})$, $\nu_\lambda(\bullet\bullet) = \rho_\lambda(\{0,1\})$, $\nu_\lambda(\bullet\times\bullet) = \rho_\lambda(\{0,2\})$, etc. ここで，「$\times$」は，その場所に $\circ$ でも，$\bullet$ でも取ってもよい（つまり，条件を課さない）ことを表す．このとき定理 2.1 より，以下の系を得る（例えば，(1) を得るには $A = \{0\}$ とする）．

系 2.2.

(1) $$(2\lambda - 1)\nu_\lambda(\bullet) - 2\lambda\nu_\lambda(\bullet\bullet) = 0.$$

さらにこの結果から，次が得られる．

$$\nu_\lambda(\bullet) = \frac{2\lambda - 1}{2\lambda} = 1 - \frac{1}{2\lambda}.$$

実は，この結果は，注 2.1 の平均場の結果と同じである．$\circ$（健康人）の世界で見ても，$\bullet$（病人）の世界で見ても同じ結果が得られる．実は後々わかるが，コンタクト・プロセスの相関不等式法は $\circ$ の世界が馴染み，美しい結果が得られやすい（例えば，定理 5.1）．これは，コンタクト・プロセスの感染過程に起因する．

第 3 章　Harris-FKG 不等式法

3.1. Harris-FKG 不等式

この章では，Harris-FKG 不等式 [26,27] を用いて，1 次元コンタクト・プロセスの臨界値の「下限」と秩序変数の「上限」を求める手法について学ぶ．後にも同様の言い回しが数回出てくるが，正確に言うと，秩序変数の「上限」を求める手法であり，そのことにより結果として，臨界値の「下限」も求まる．さて，この Harris-FKG 不等式については，例えば，Liggett [1] の教科書の 70-83 ページを参照のこと．また，ここで紹介する結果は Konno and Katori [28] に発表されている．さて，一般的な Harris-FKG 不等式より次が得られる．本稿では，この不等式を「Harris-FKG 不等式」と呼ぼう．

定理 3.1. *(Harris-FKG 不等式)* 任意の $A, B \in Y$ に対して，

(1)
$$\rho_\lambda(A \cup B) \geq \rho_\lambda(A)\rho_\lambda(B),$$

(2)
$$\overline{\rho}_\lambda(A \cup B) \geq \overline{\rho}_\lambda(A)\overline{\rho}_\lambda(B),$$

但し，$\rho_\lambda(A) = \nu_\lambda\{\eta : \text{任意の } x \in A \text{ に対して}, \eta(x) = 1\}$，$\overline{\rho}_\lambda(A) = \nu_\lambda\{\eta : \text{任意の } x \in A \text{ に対して}, \eta(x) = 0\}$.

定理 3.1 (1) で，以下，(1) については，$A = \{0\}, B = \{1\}$ とし，(2) については，$A = \{0\}, B = \{1, 2\}$ とすると，次の結果を得る．

系 3.2.

(1)
$$\nu_\lambda(\bullet\bullet) \geq \nu_\lambda(\bullet)^2.$$

(2)
$$\nu_\lambda(\bullet\bullet\bullet) \geq \nu_\lambda(\bullet)\nu_\lambda(\bullet\bullet).$$

上の式 (1) と (2) を条件付確率の形で書き直すと，

$$\nu_\lambda(\bullet|\bullet) \geq \nu_\lambda(\bullet),$$
$$\nu_\lambda(\bullet|\bullet\bullet) \geq \nu_\lambda(\bullet),$$

但し,

$$\nu_\lambda(\bullet|\bullet) = \nu_\lambda\{\eta : \eta(1) = 1|\eta(0) = 1\},$$
$$\nu_\lambda(\bullet|\bullet\bullet) = \nu_\lambda\{\eta : \eta(2) = 1|\eta(1) = \eta(0) = 1\}.$$

この意味は，例えば，$\nu_\lambda(\bullet|\bullet) \geq \nu_\lambda(\bullet)$ であれば，単独で $\bullet$ (病人) が存在するよりも，隣に $\bullet$ が存在するほうが，確率が高いという意味である．これは，$\bullet$ の集まりやすさの程度を示している．また，上式を九大の数理生物学グループでよく使われる記号を用いると，

$$q_{+/+} \geq q_+, \quad q_{+/++} \geq q_+$$

に対応する．ここで，+ は $\bullet$ を示す．同様に定理 3.1 (2) から，次がわかる．

系 3.3.

(1)
$$\nu_\lambda(\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ)^2.$$

(2)
$$\nu_\lambda(\circ\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ)\nu_\lambda(\circ\circ).$$

(3)
$$\nu_\lambda(\circ\circ\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ)\nu_\lambda(\circ\circ\circ).$$

(4)
$$\nu_\lambda(\circ\circ\times\circ) \geq \nu_\lambda(\circ)\nu_\lambda(\circ\circ).$$

系 3.2 と同じように，上の式 (1) と (2) を条件付確率の形で書き直すと，

$$\nu_\lambda(\circ|\circ) \geq \nu_\lambda(\circ),$$
$$\nu_\lambda(\circ|\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ),$$

但し,

$$\nu_\lambda(\circ|\circ) = \nu_\lambda\{\eta : \eta(1) = 0|\eta(0) = 0\},$$
$$\nu_\lambda(\circ|\circ\circ) = \nu_\lambda\{\eta : \eta(2) = 0|\eta(1) = \eta(0) = 0\}.$$

この意味は，$\bullet$ の場合と同様に，例えば，$\nu_\lambda(\circ|\circ) \geq \nu_\lambda(\circ)$ であれば，単独で $\circ$ (健康人) が存在するよりも，隣に $\circ$ が存在するほうが，確率が高いという意味である．これも，$\circ$ の集まりやすさの程度を示している．また，九大の数理生物学グループでよく使われる記号を用いると，

$$q_{0/0} \geq q_0, \quad q_{0/00} \geq q_0$$

に対応する．ここで,「0」は $\circ$ を示す.

3.2. *Harris-FKG* 不等式法による第 1 近似

系 2.4 (1) と系 3.3 (1) から,

$$1 - (2\lambda + 1)\nu_\lambda(\circ) + 2\lambda\nu_\lambda(\circ)^2 \leq 0.$$

が得られる．$\nu_\lambda(\circ) = 1 - \nu_\lambda(\bullet) = 1 - \rho_\lambda$ を用いると，この不等式は次のように書き直せ，第 1 近似に対応する以下の定理が得られる．

$$\rho_\lambda\left(\rho_\lambda - \frac{2\lambda - 1}{2\lambda}\right) \leq 0.$$

(2) $$\lambda\nu_\lambda(\bullet) - (\lambda+1)\nu_\lambda(\bullet\bullet) + \lambda\nu_\lambda(\bullet\times\bullet) - \lambda\nu_\lambda(\bullet\bullet\bullet) = 0.$$

(3) $$\lambda\nu_\lambda(\bullet\bullet) - \nu_\lambda(\bullet\times\bullet) - \lambda\nu_\lambda(\bullet\bullet\bullet) + \lambda\nu_\lambda(\bullet\times\times\bullet) - \lambda\nu_\lambda(\bullet\bullet\times\bullet) = 0.$$

注 **2.1.** 系 2.2 (1) で $\nu_\lambda(\bullet\bullet) = \nu_\lambda(\bullet)^2$ を仮定する．つまり，$\{\eta : \eta(x) = 1\}$ と $\{\eta : \eta(x+1) = 1\}$ とが上限不変測度 ν_λ に関して独立事象とする．このとき，もし $\nu_\lambda(\bullet) > 0$ ならば，

$$\nu_\lambda(\bullet) = \frac{2\lambda - 1}{2\lambda} = 1 - \frac{1}{2\lambda}$$

である．この値は,「平均場の値（mean-field value）」と呼ばれる（また，対応する分枝過程の 1 点から出発した生存確率とも一致している）．残念ながらこの仮定は正しくはない．実は，この量は Harris-FKG 不等式法の第 1 近似 $\rho_\lambda^{(H,1)}$ あるいは，Karoti-Konno 法の第一近似 $\rho_\lambda^{(KK,1)}$ としても得られる．

次に $\overline{\rho}_\lambda(A)$ に対する相関等式について考える．任意の $A \in Y$ に対して，$\prod_{x\in A}(1-\eta(x))$ を η の関数として Ω に作用させると，後に引用される次の重要な定理が得られる．

定理 **2.3.** 任意の $A \in Y$ に対して，

$$\lambda \sum_{x\in A}\sum_{y:|y-x|=1}\Big[\overline{\rho}_\lambda(A\cup\{y\}) - \overline{\rho}_\lambda(A)\Big] + \sum_{x\in A}\Big[\overline{\rho}_\lambda(A\setminus\{x\}) - \overline{\rho}_\lambda(A)\Big] = 0,$$

但し，$\overline{\rho}_\lambda(A) = \nu_\lambda\{\eta :$ 任意の $x \in A$ に対して, $\eta(x) = 0\}$.

次に以下の記号を導入する．$\nu_\lambda(\circ) = \overline{\rho}_\lambda(\{0\})$, $\nu_\lambda(\circ\circ) = \overline{\rho}_\lambda(\{0,1\})$, $\nu_\lambda(\circ\times\circ) = \overline{\rho}_\lambda(\{0,2\})$, etc. このとき上記の定理から次の結果を得る

系 **2.4.**

(1) $$1 - (2\lambda+1)\nu_\lambda(\circ) + 2\lambda\nu_\lambda(\circ\circ) = 0.$$

(2) $$\nu_\lambda(\circ) - (\lambda+1)\nu_\lambda(\circ\circ) + \lambda\nu_\lambda(\circ\circ\circ) = 0.$$

(3) $$2\nu_\lambda(\circ\circ) - (2\lambda+3)\nu_\lambda(\circ\circ\circ) + \nu_\lambda(\circ\times\circ) + 2\lambda\nu_\lambda(\circ\circ\circ\circ) = 0.$$

(4) $$\nu_\lambda(\circ) + \lambda\nu_\lambda(\circ\circ\circ) - (2\lambda+1)\nu_\lambda(\circ\times\circ) + \lambda\nu_\lambda(\circ\circ\times\circ) = 0.$$

注 **2.2.** 系 2.4 (1) で $\nu_\lambda(\circ\circ) = \nu_\lambda(\circ)^2$ を仮定する．即ち，$\{\eta : \eta(x) = 0\}$ と $\{\eta : \eta(x+1) = 0\}$ とが上限不変測度 ν_λ に関して独立事象とする．この仮定のもとで，もし $\nu_\lambda(\circ) < 1$ ならば，次が成立する．

$$\nu_\lambda(\circ) = \frac{1}{2\lambda}$$

定理 3.4. *Let* $\lambda_c^{(H,1)} = 1/2$.

$$\rho_\lambda^{(H,1)} = \begin{cases} (2\lambda-1)/2\lambda & (\lambda > \lambda_c^{(H,1)}), \\ 0 & (\lambda \le \lambda_c^{(H,1)}) \end{cases}$$

このとき，次が成立する．

(1) $$\lambda_c^{(H,1)} \le \lambda_c,$$

(2) $$\rho_\lambda \le \rho_\lambda^{(H,1)} \qquad (\lambda \ge 0).$$

このようにして，臨界値 λ_c の下限 $\lambda_c^{(H,1)}$ と秩序変数 ρ_λ の上限 $\rho_\lambda^{(H,1)}$ を同時に得ることができる．実は，定理 3.4 は別の方法でも求めることが可能である．即ち，系 2.2 (1) と系 3.2 (1) から次の不等式が得られるので，同じ結論が導かれる．

$$(2\lambda-1)\nu_\lambda(\bullet) - 2\lambda\nu_\lambda(\bullet)^2 \ge 0.$$

しかし，Harris-FKG 不等式を用いる場合，系 2.4 は 系 2.2 よりも適しているといえる．何故なら，系 2.4 の負の項の数はいつも唯一つだからである．従って，今後改良した結果を得るために系 2.2 のタイプの $\bullet$（病人）の世界を用いるのではなく，$\circ$（健康人）の世界の系 2.4 を用いる．同様にして，系 2.4 (1) (2) と系 3.3 (2) を用いて第 2 近似が，系 2.4 (1)-(4) と系 3.3 (3) (4) を用いて第 3 近似がそれぞれ求まる．さらに，第 4 近似まで同様の手法により求めることが可能である．いずれも，$\circ$ の世界がよく馴染む．

この Harris-FKG 不等式による手法は最も簡単な手法と考えられるが，後に見るように Katori-Konno 法の方が良い評価を与えることがわかる．また，この章での議論は，高次元の場合にも同様に成立することもわかっている [28]．しかし，コンタクト・プロセスのような「0」と「1」の 2 状態ではなく，空き地，健康人，病人のような 3 状態，あるいはそれ以上の状態数のモデルの場合には，この章に対応する話はまだ出来ていない．これは，今後の課題である．最後に次の興味深い結果を述べておく（例えば，Liggett [1] p.267 を参照）．

定理 3.5. $n \ge 1$ とする．$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ と $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ が $x_{i+1} - x_i \ge y_{i+1} - y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ の関係を満たしているとき

$$\overline{\rho}_\lambda(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) \le \overline{\rho}_\lambda(\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}).$$

上の定理より，例えば，$\overline{\rho}_\lambda(\{0,2\}) \le \overline{\rho}_\lambda(\{0,1\})$, 即ち，

$$\nu_\lambda(\circ \times \circ) \le \nu_\lambda(\circ\circ).$$

が成立する．つまり，健康人の数が同じなら，上記の意味で集まった方が存在しやすいことを表している．

第 4 章　Harris の補題と Katori-Konno 法

4.1. 序説

この章では，1次元コンタクト・プロセスの臨界値の「下限」と秩序変数の「上限」を Harris の補題を用いて求める方法について紹介する．この手法は１９９１年に Katori and Konno [29] によって導入された．そこで本稿ではこの手法を「Katori-Konno 法」と呼ぶことにする．本章で紹介する結果は参考文献の [29-31] に掲載されている．また，コンタクト・プロセスの場合，この Katori-Konno 法は Harris-FKG 不等式法に比べて一般に良い近似が得られる．この点は重要であり，第５章で紹介する BFKL 不等式と密接に関係している．

4.2. Harris の補題

この節では，臨界値の「下限（上限)」と秩序変数の「上限（下限)」を与える Harris の補題について説明をする．Y は要素数が有限の $\mathbf{Z}$ の部分集合全体とする．任意の $A \in Y$ に対して，

$$\sigma_\lambda(A) = 1 - E_{\nu_\lambda}\left(\prod_{x\in A}(1-\eta(x))\right) = \nu_\lambda\{\eta : \text{ある } x \in A \text{ に対して}, \eta(x) = 1\},$$

とおく．このとき次が成立することに注意する．

$$\sigma_\lambda(A) = 1 - \overline{\rho}_\lambda(A), \quad \rho_\lambda = \rho_\lambda(\{0\}) = 1 - \overline{\rho}_\lambda(\{0\}) = \sigma_\lambda(\{0\}),$$

但し，0 は原点である．$\sigma_\lambda(A)$ の定義と定理 2.3 から，次の相関等式を直ちに得る．

定理 4.1. 任意の $A \in Y$ に対して，

$$\lambda \sum_{x\in A}\sum_{y:|y-x|=1}\Big[\sigma_\lambda(A\cup\{y\}) - \sigma_\lambda(A)\Big] + \sum_{x\in A}\Big[\sigma_\lambda(A\setminus\{x\}) - \sigma_\lambda(A)\Big] = 0.$$

例えば，臨界値 λ_c の「下限」と秩序変数 ρ_λ の「上限」を得るためには，$\sigma_\lambda(A)$ に関する適当な上限 $h_\lambda(A)$ を見つけなければならない．何故なら，$\rho_\lambda = \sigma_\lambda(\{0\}) \le h_\lambda(\{0\})$ によって，$h_\lambda(\{0\})$ の臨界値が λ_c の下限を与える場合が存在するからである．このために，１９７６年に Harris [32] によって得られた次の補題を用いる．それゆえ，これをここでは「Harris の補題」と呼ぶことにする．また，この補題は高次元でもツリー上でも拡張可能であるが，多状態への拡張は成功していない．今後の最重要課題である．

Y^* を Y 上の [0,1]-値可測関数全体とする．このとき，定理 4.1 の結果を考慮して，任意の $h \in Y^*$ に対し，

$$\Omega^* h(A) = \lambda \sum_{x\in A}\sum_{y:|y-x|=1}\Big[h(A\cup\{y\}) - h(A)\Big] + \sum_{x\in A}\Big[h(A\setminus\{x\}) - h(A)\Big]$$

とおく．

補題 4.2. *(Harris の補題)* $h_i \in Y^*$ $(i = 1, 2)$ は次の条件及び，ここでは省略するが付加的な条件を満たすと仮定する．

(1) 任意の $A \in Y$ に対して，$\Omega^* h_1(A) \le 0 \le \Omega^* h_2(A)$.

このとき，

(2) 任意の $A \in Y$ に対して，$h_2(A) \le \sigma_\lambda(A) \le h_1(A)$.

特に，$A=\{0\}$ とすると，

$$h_2(\{0\}) \le \rho_\lambda \le h_1(\{0\}), \tag{3}$$

但し，0 は原点である．

定理 4.1 から $\Omega^*\sigma_\lambda(A)=0$ が任意の $A\in Y$ に対して成立することに注意する．従って，条件は，$\Omega^*h_1(A)\le\Omega^*\sigma_\lambda(A)=0\le\Omega^*h_2(A)$ と見直すことができ，この条件が一番本質的で，しかも一般にチェックが難しい．

これからは，Harris の補題を用いて，ρ_λ と λ_c の評価することについて考える．そのために，次の 3 つのステップが必要となる．

ステップ 1. 最初に $h_i(A)$ の適当な関数形を選ぶ．
ステップ 2. 次に，具体的に $h_i(A)$ を決定する．
ステップ 3. Harris の補題の条件をチェックする．

以下 Katori-Konno 法を用い具体的に，生存確率 $\sigma_\lambda(A)$ の上限を求めよう．実は，この "下限"については，同様に Harris の補題を用いて，Holley-Liggett 法によって求められるが，それに関しては第 6 章で紹介する．

4.3. Katori-Konno 法による第 1 次近似

まず，$|A|$ を有限集合 A の要素の個数とする．このとき次が成立する．

定理 4.3. $\lambda_c^{(KK,1)}=1/2$ とおく．このとき $\lambda\ge\lambda_c^{(KK,1)}$ に対して，

$$\sigma_\lambda(A)\le h_\lambda^{(KK,1)}(A) \quad (A\in Y),$$

但し，

$$h_\lambda^{(KK,1)}(A)=1-\alpha_*^{|A|}, \quad \alpha_*=\frac{1}{2\lambda}.$$

上記の $h_\lambda^{(KK,1)}(A)$ が A の個数にしか依存していないことから，この上限が平均場の結果と一致していることが理解できる．定理 4.3 を $A=\{0\}$ の場合に適用すると，次の系が得られる．

系 4.4.

$$\lambda_c\ge\lambda_c^{(KK,1)}=\frac{1}{2},$$
$$\rho_\lambda\le\rho_\lambda^{(KK,1)}=1-\left(\frac{1}{2\lambda}\right)=\frac{2\lambda-1}{2\lambda} \quad \text{但し，} \quad \lambda\ge\frac{1}{2}.$$

この系は，Harris-FKG 不等式法の第 1 近似として得られた定理 3.4 と同じである．

4.4. Katori-Konno 法による第 2 近似

$b(A)$ を A に属する最近接のペアの個数とする．即ち，$b(A)=|\{x\in\mathbf{Z}:\{x,x+1\}\subset A\}|$ である．このとき次が成り立つ．

定理 4.5. $\lambda_c^{(KK,2)} = 1$ とおく．このとき，$\lambda \geq \lambda_c^{(KK,2)}$ に対して，

$$\sigma_\lambda(A) \leq h_\lambda^{(KK,2)}(A) \quad (A \in Y),$$

但し，

$$h_\lambda^{(KK,2)}(A) = 1 - \alpha_*^{|A|}\beta_*^{b(A)},$$

$$\alpha_* = \frac{1}{2\lambda - 1}, \qquad \beta_* = \frac{2\lambda - 1}{\lambda}.$$

上記の $h_\lambda^{(KK,2)}(A)$ が A の個数だけでなく，A のペアの個数 $b(A)$ に依存していることから，この上限がペア近似の結果と一致していることが想像できる．実際に，この結果はペア近似の結果と一致する．定理 4.5 に $A = \{0\}$ を適用すると，

系 4.6.

$$\lambda_c \geq \lambda_c^{(KK,2)} = 1,$$

$$\rho_\lambda \leq \rho_\lambda^{(KK,2)} = 1 - \left(\frac{1}{2\lambda - 1}\right) = \frac{2(\lambda - 1)}{2\lambda - 1} \quad \text{但し，} \quad \lambda \geq 1.$$

Harris-FKG 不等式法から得られた第２近似と比べると，この結果の方がよい．第３近似も同様にして得られるが割愛する．

第５章　BFKL 不等式法

5.1. 序説

本章では，１次元コンタクト・プロセスの臨界値の「下限」と秩序変数の「上限」を BFKL 不等式 [33] を用いて求める方法について紹介する．この BFKL 不等式は１９９４年に Konno [16] によって予想されたが，実際に証明されたのは１９９７年である [33]．一方，数理生物学の分野では BFKL 不等式の特別な場合が，２次元の拡散的なコンタクト・プロセスを含むクラスのモデルに対して，モンテカルロ・シミュレーションの結果などから予想され，「修正ペア近似」として用いられていた [34]．このようにまったく異なる分野で独立に，同じタイプの相関不等式が予想され，近似の議論に用いられていたことは興味深いことである．

この不等式は，Harris-FKG 不等式をある意味で精密化したものである．また，前の章で述べた Katori-Konno 法によって得られた臨界値の下限と秩序変数の上限は，実は上記の BFKL 不等式を用いることによって，全く同じ結果を比較的簡単に得ることができる．しかも，後で述べるように BFKL 不等式は一般に高次元でも，あるいはツリーでも成立する．さらに空間的に非一様なコンタクト・プロセスでも BFKL 不等式は成立する．また，方向性のあるパーコレーションを含む，離散時間の確率セルオートマトン（Domany-Kinzel モデル [35,36]）の吸収的な場合にも成立することも示され，その適用範囲は非常に広範囲であり，かつ強力である．尚，ペア近似に関しては第０章でも述べたが，例えば [7,8,34,37] を参照のこと．

5.2. BFKL 不等式

以下紹介する BFKL 不等式が Belitsky, Ferrari, Konno and Liggett [31] によって得られた．

定理 5.1. (*BFKL* 不等式) 任意の $A, B \in Y$ に対して,

$$\overline{\rho}_\lambda(A \cap B)\overline{\rho}_\lambda(A \cup B) \geq \overline{\rho}_\lambda(A)\overline{\rho}_\lambda(B),$$

但し, $\overline{\rho}_\lambda(A) = \nu_\lambda\{\eta : \text{任意の } x \in A \text{ に対して}, \eta(x) = 0\}$.

実はこの定理が, 以下の Harris-FKG 不等式 (定理 3.1 (2)) を精密化した結果であることは, 定理 5.1 の不等式の形から明らかである.

$$\overline{\rho}_\lambda(A \cup B) \geq \overline{\rho}_\lambda(A)\overline{\rho}_\lambda(B).$$

また, この定理 5.1 の系として次が得られる.

系 5.2.

(1) $$\nu_\lambda(\circ)\nu_\lambda(\circ\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ\circ)^2.$$

(2) $$\nu_\lambda(\circ\circ)\nu_\lambda(\circ\circ\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ\circ\circ)^2.$$

(3) $$\nu_\lambda(\circ)\nu_\lambda(\circ\circ\times\circ) \geq \nu_\lambda(\circ\circ)\nu_\lambda(\circ\times\circ).$$

例えば, 定理 5.1 で $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}$ とすると系 5.2 (1) を得ることができる. 系 5.2 の式 (1), (2) を条件付確率の形で書き直すと,

$$\nu_\lambda(\circ|\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ|\circ),$$
$$\nu_\lambda(\circ|\circ\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ|\circ\circ),$$

九大の数理生物学グループでよく使われる記号を用いて, 書き直すと,

$$q_{0/00} \geq q_{0/0}, \quad q_{0/000} \geq q_{0/00}$$

に対応する. 一方, Harris-FKG 不等式からは,

$$\nu_\lambda(\circ|\circ) \geq \nu_\lambda(\circ),$$
$$\nu_\lambda(\circ|\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ),$$

しか示されていないことに注意. ただ, これらを組み合わせると,

$$\nu_\lambda(\circ|\circ\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ|\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ|\circ) \geq \nu_\lambda(\circ),$$

が得られる. また, 次の不等式は 系 5.2 (1) と同値であることもわかる.

$$\nu_\lambda(\bullet|\circ\circ) \leq \nu_\lambda(\bullet|\circ),$$

即ち,

$$q_{+/00} \leq q_{+/0}.$$

以上より, 上記で与えられるコンタクト・プロセスの「修正ペア近似」は, 全て BFKL 不等式を用いることにより正当化されることが分かった. この BFKL 不等式は, 高次元でもツリー上でも成立するので, その場合の上記に対応する修正ペア近似も正当化されることが分かる. 逆にいえば, このことが BFKL 不等式を証明する動機の一つになっている.

5.3. BFKL 不等式法

この節では, BFKL 不等式を用いて, 1 次元コンタクト・プロセスの臨界値の下限と秩序変数の上限を求めた結果を紹介する. この議論は BFKL 不等式が成り立つとして, Konno [16] によって紹介された. 以下の結果は Katori-Konno 法で得られた第 2 近似と一致し,「ペア近似」に対応するものである. 証明は Harris-FKG 不等式法と同様にできる. また, 同じように第 3 近似を求めることも可能であるが省略する.

定理 5.3. *BFKL 不等式（系 5.2(1)）*

$$\nu_\lambda(\circ)\nu_\lambda(\circ\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ\circ)^2$$

と相関等式（系 *2.4(1),(2)*）

$$1-(2\lambda+1)\nu_\lambda(\circ)+2\lambda\nu_\lambda(\circ\circ)=0$$
$$\nu_\lambda(\circ)-(\lambda+1)\nu_\lambda(\circ\circ)+\lambda\nu_\lambda(\circ\circ\circ)=0$$

より，次の結果を得る．

$$\lambda_c \geq \lambda_c^{(KK,2)}=1,$$
$$\rho_\lambda \leq \rho_\lambda^{(KK,2)}=1-\left(\frac{1}{2\lambda-1}\right)=\frac{2(\lambda-1)}{2\lambda-1} \qquad (\lambda \geq 1).$$

また，詳細は述べないがこの BFKL 不等式法は，マルコフ拡張（Markov extension）と密接に関わっている [38].

5.4. BFKL 不等式と確率測度

最後にこの節では，Katori-Konno 法（BFKL 不等式法）と $X=\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ 上の確率測度 $\overline{\nu_\lambda}^{(n)}$ $(n=1,2)$ の関係について論じたい．

第 1 近似：Katori-Konno 法の第 1 近似に対応する X 上の確率測度 $\overline{\nu_\lambda}^{(1)}$ を次で定義する．

$$\overline{\nu_\lambda}^{(1)}\{\eta : \text{任意の } x \in A \text{ に対して}, \eta(x)=0\}=\alpha^{|A|},$$

但し，α $(\in [0,1])$ は後で決める．上式は，$\overline{\nu_\lambda}^{(1)}$ は，各点が「0」である（各点に健康な人が存在する）確率が，他の点とは独立に α で与えられている，即ち，パラメータ α のベルヌイ分布に従うことを意味している．これはまさに，平均場近似に対応する確率測度である．この定義から，次の等式は簡単にチェックできる:

$$\overline{\nu_\lambda}^{(1)}(\circ\circ)=\overline{\nu_\lambda}^{(1)}(\circ)^2, \tag{5.1}$$

但し，$\overline{\nu_\lambda}^{(1)}(\circ\circ)=\overline{\nu_\lambda}^{(1)}\{\eta : \eta(0)=\eta(1)=0\}$ かつ $\overline{\nu_\lambda}^{(1)}(\circ)=\overline{\nu_\lambda}^{(1)}\{\eta : \eta(0)=0\}$. 系 2.4 (1) の場合と同じように，次の方程式が成立することを仮定する．

$$1-(2\lambda+1)\overline{\nu_\lambda}^{(1)}(\circ)+2\lambda\overline{\nu_\lambda}^{(1)}(\circ\circ)=0. \tag{5.2}$$

(5.1) と (5.2) より，

$$\overline{\nu_\lambda}^{(1)}(\circ)=\alpha_*=\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\wedge 1,$$

但し，$a\wedge b$ は a と b の最小値．この結果から，もし $\lambda \leq 1/2$ ならば，$\overline{\nu_\lambda}^{(1)}=\delta_0$ であることがわかる．

第 2 近似：Katori-Konno 法の第 2 近似に対応する X 上の確率測度 $\overline{\nu_\lambda}^{(2)}$ を次で定義する．

$$\overline{\nu_\lambda}^{(2)}\{\eta : \text{任意の } x \in A \text{ に対して}, \eta(x)=0\}=\alpha^{|A|}\beta^{b(A)}.$$

これより

$$\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ\circ\circ)=\frac{\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ\circ)^2}{\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ)}, \tag{5.3}$$

但し，$\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ\circ\circ) = \overline{\nu_\lambda}^{(2)}\{\eta : \eta(0) = \eta(1) = \eta(2) = 0\}$. 系 2.6 (1), (2) と同様に，次の方程式が成立することを仮定する:

$$1 - (2\lambda + 1)\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ) + 2\lambda\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ\circ) = 0. \tag{5.4}$$

$$\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ) - (\lambda + 1)\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ\circ) + \lambda\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ\circ\circ) = 0. \tag{5.5}$$

方程式 (5.3)-(5.5) により，次の結果を得る.

$$\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ) = \alpha_* = \left[\left(\frac{1}{2\lambda - 1}\right) \wedge 1\right] \vee 0, \qquad \beta_* = \left(\frac{2\lambda - 1}{\lambda}\right) \vee 1,$$

但し，$a \vee b$ は a と b の最大値. この結果より，もし $\lambda \leq 1$ ならば，$\overline{\nu_\lambda}^{(2)} = \delta_0$. さらに，次の例のように任意の $A \in Y$ に対して，$\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(A)$ が計算できる.

$$\begin{aligned}
\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ\circ\times\circ) &= \frac{\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ\circ)\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ\times)\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\times\circ)}{\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ)\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\times)} \\
&= \frac{\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ\circ)\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ)^2}{\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ)} \\
&= \overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ\circ)\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ),
\end{aligned}$$

但し，$\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ\times) = \overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\times\circ) = \overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\circ)$, $\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\times) = 1$ に注意. この確率測度がまさに「ペア近似」に対応する. 同様な議論が，第 3 近似でもできるが省略する. また，一般の第 n 近似に対しても成立していると期待できるが，それに関しては今後の研究課題である.

注 5.1. 任意の $x_{i+1} - x_i \geq y_{i+1} - y_i$ $(i = 1, 2, \ldots n-1)$ を満たす $n \geq 1$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ と $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ に対して，

$$\overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) \geq \overline{\nu_\lambda}^{(2)}(\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}),$$

が成立する. つまり，ペア近似に対応する確率測度 $\overline{\nu_\lambda}^{(2)}$ で測っても，健康な人が同じ人数なら集まっていた方が存在しやすいことを示し，定理 3.5 と同様の結果を得ているのは興味深い（このときは $\overline{\rho}_\lambda$ であり，上限不変測度 $\overline{\nu_\lambda}$ で測っている）.

第 6 章　Holley-Liggett 法

6.1. 序説

この章と次の章では，1 次元のコンタクト・プロセスの臨界値の「上限」と秩序変数の「下限」を求める手法について解説する. 但し，この方法の多次元への拡張はまだ成功していない. 今後の重要な課題の一つである. さて，この章で紹介する Holley-Liggett 法は，基本的には Harris の補題の条件を満たす適当な更新測度（renewal measure）を求めることである. Holley and Liggett [12] はこの方法により，臨界値に対する上限:

$$\lambda_c \leq \lambda_c^{(HL,1)} = 2,$$

と秩序変数に対する下限:

$$\rho_\lambda \geq \rho_\lambda^{(HL,1)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\lambda}} \qquad (\lambda \geq 2).$$

を求めた．さらにこの Holley-Liggett 法を拡張することによって，Liggett [13] は先の評価を改良した次の上限を求めた．

$$\lambda_c \le \lambda_c^{(HL,2)} \approx 1.942,$$

但し，

$$\lambda_c^{(HL,2)} = \sup\{\lambda \ge 0 : 4\lambda^3 - 7\lambda^2 - 2\lambda + 1 \le 0\}.$$

彼の議論より，$\lambda \ge \lambda^{(HL,2)}$ に対して，秩序変数に対する以下の改良された下限も求められる．

$$\rho_\lambda \ge \rho_\lambda^{(HL,2)} = \frac{\lambda + \alpha - 1 + \sqrt{(\lambda+\alpha-1)^2 - \alpha\Big[2\lambda + \alpha - 2 + 2\lambda F_1(2)\Big]}}{2\lambda + \alpha - 2 + 2\lambda F_1(2)},$$

但し，

$$\alpha = \frac{4\lambda - 2}{4\lambda - 1} \quad , \quad F_1(2) = \frac{4\lambda - 1}{(4\lambda+1)(2\lambda-1)}.$$

一般の第 n 近似の形式的な議論は Liggett [13] の中でされてはいるが，具体的に解くことは非常に難しく，数値的には第 3 近似までしか求められていない．

6.2. Holley-Liggett 法

6.2.1. *Holley-Liggett* 法による第 1 近似

まず，次の $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ 上の密度 f を持つ更新測度 μ を定義する：

$$\mu(\bullet\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n_1}\bullet\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n_2}\bullet\circ\ldots\circ\bullet\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n_k}\bullet) = \frac{f(n_1+1)f(n_2+1)\cdots f(n_k+1)}{\sum_{m=1}^{\infty} mf(m)}.$$

このとき $f(n)$ は，以下で与えられる：

$$f(n) = \frac{\mu(\bullet\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n-1}\bullet)}{\mu(\bullet)}.$$

詳細は省略するが，Harris の補題を用いることにより，次の結果を得る．

定理 6.1. $\lambda_c^{(HL,1)} = 2$ とおく．このとき，$\lambda \ge \lambda_c^{(HL,1)}$ に対して，

$$\text{任意の } A \in Y \text{ に対して}, h_\lambda^{(HL,1)}(A) \le \sigma_\lambda(A)$$

但し，

$$h_\lambda^{(HL,1)}(A) = \mu\{\eta : \text{ある } x \in A \text{ が存在して}, \eta(x) = 1\},$$

また，$\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ 上の更新測度 μ の密度 f は次で決まる： 全ての $\{1,2,\ldots,n\}$ $(n \ge 1)$ の形をした A に対して，$\Omega^* h_\lambda^{(HL,1)}(A) = 0$.

定理 6.1 を $A = \{1\}$ に適用することにより，

系 **6.2.**

$$\lambda_c \le \lambda_c^{(HL,1)} = 2.$$

$$\rho_\lambda \ge \rho_\lambda^{(HL,1)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\lambda}} \quad (\lambda \ge 2).$$

Katori-Konno 法の第 1 近似では，一箇所 $*$ （ここで，$*$ は $\circ$ でも $\bullet$ でも取りえることを意味する）に注目したのに対し，この第 1 近似は病人の間隔 $\bullet\circ\cdots\circ\bullet$ に着目した近似である．

6.2.2. *Holley-Liggett* 法による第 2 近似

第 1 近似と同様に，Liggett [13] によって与えられた第 2 近似の結果を紹介する．

定理 **6.3.** $\lambda_c^{(HL,2)} \approx 1.942$ を次の 3 次方程式の最大解とする．

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

このとき，$\lambda \ge \lambda_c^{(HL,2)}$ に対して，

$$\text{任意の } A \in Y \text{ に対して}, h_\lambda^{(HL,2)}(A) \le \sigma_\lambda(A),$$

但し，

$$h_\lambda^{(HL,2)}(A) = \mu\{\eta : \text{ある } x \in A \text{ に対して } \eta(x) = 1\},$$

但し，拡張された更新測度 μ は $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ 上の測度で，その密度は次の無限個の方程式のよって決まる：$\Omega^* h_\lambda^{(HL,2)}(A) = 0$. このとき A は次の形 $\{1,2,\ldots,n\}$ $(n \ge 1)$ かつ $\{1,3\}$.

拡張された更新測度 μ の詳しい定義については，Liggett [13] を参照のこと．定理 6.3 に $A = \{1\}$ を適用することにより，序説で述べた結果を得る．Katori-Konno 法の第 2 近似では，2 箇所 $**$ （ここで，$*$ は $\circ$ でも $\bullet$ でも取りえることを意味する）に注目したのに対し，この第 2 近似は病人間とその一方の病人の隣 $\bullet\circ\cdots\circ\bullet*$ に着目した近似である．個人的には，第 2 近似として自然なものは，ここで述べたものではなく，むしろ第 0 章で少し述べた「病人間ペア近似」$\bullet\circ\cdots\circ\bullet\circ\cdots\circ\bullet$ に対応する近似であると考える（第 0 章では「病人」を「粒子」,「健康人」を「空き地」と解釈していた）．実際数値的にも，こちらの近似の方がよい値を与える [39-41].

第 7 章　Holley-Liggett 法に対応する相関不等式法

7.1. 序説

本章では，前の章で紹介した 1 次元コンタクト・プロセスに対して Holley-Liggett 法で得られた評価と同じ評価を導く，新しいタイプの相関不等式について議論を行う．残念ながら，この相関不等式はまだ証明されていない．

7.2. 相関等式と相関不等式

第 2 章と第 4 章では，いくつかの相関等式を紹介した．具体的には，定理 2.1, 2.3, 4.1 を参照．この節では別のタイプの相関等式（補題 7.1）を紹介する．そして，その相関等式と証明されていないが新しいタイプの相関不等式が成立すると仮定することによって，Holley-Liggett 法によって得られた評価を比較的たやすく得ることができる．

7.2.1. 第 1 近似

任意の $k \geq 2$ と $n_i \geq 0\,(i = 1, \ldots, k)$ に対して，以下を $n_1+1, n_1+n_2+2, \ldots, n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+k-1$ の場所で 1 を取り，ほかの $[1, n_1+n_2+\cdots+n_k+k-1]$ の場所では 0 を取る事象の上限不変測度 ν_λ に対する確率とする：

$$\nu_\lambda\Big(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n_1}\bullet\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n_2}\bullet\circ\ldots\circ\bullet\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n_k}\Big).$$

例えば，

$$\nu_\lambda(\bullet) = \nu_\lambda\{\eta : \eta(1) = 1\} = \rho_\lambda,$$
$$\nu_\lambda(\circ\bullet\circ\circ) = \nu_\lambda\{\eta : \eta(1) = 0, \eta(2) = 1, \eta(3) = \eta(4) = 0\}.$$

このとき，以下の相関等式が成立することが分かる．

補題 7.1. 任意の $n \geq 1$ に対して，

$$2\lambda\nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n}\bullet) = \sum_{k=1}^{n}\nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{k-1}\bullet\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n-k}).$$

次に，Holley-Liggett 法によって得られた第 1 近似と同じ結果を得るために，以下の相関不等式を仮定する．

予想 7.2. 任意の $m, n \geq 1$ に対して，

$$\nu_\lambda(\bullet)\nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{m}\bullet\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n}) \leq \nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{m}\bullet)\nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n}\bullet).$$

注 7.1. Liggett [42] は１９９４年に以下のような議論をしている: もし任意の $n, m \geq 1$ に対して，

$$\nu_\lambda(\bullet)\nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{m}\bullet\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n}) > \nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{m}\bullet)\nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n}\bullet),$$

が成立するならば，Holley-Liggett 法は成り立たない．従って，ある $n, m \geq 1$ が存在して，

$$\nu_\lambda(\bullet)\nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{m}\bullet\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n}) \leq \nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{m}\bullet)\nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n}\bullet)$$

である．これに比べると，上記の予想の主張は非常に強い．ところで，最近の我々のモンテカルロシミュレーションの結果によると，上記の予想は小さな値の m と n に対して成立しているようである (Tretyakov, Belitsky, Konno and Yamaguchi [43]) 具体的には，$(m, n) = (1,1), (2,1), (1,2), (2,2)$ の場合である．

注 7.2. 予想 7.2 の $m = n = 1$ の場合は，

$$\nu_\lambda(\bullet)\nu_\lambda(\circ\bullet\circ) \leq \nu_\lambda(\circ\bullet)^2$$

となるが，この相関不等式は次と同値である：

$$\nu_\lambda(\bullet)\nu_\lambda(\bullet\bullet\bullet) \leq \nu_\lambda(\bullet\bullet)^2.$$

ところで，上記の注 7.2 で述べた $m=n=1$ のときですら予想 7.2 は興味深い．その理由は以下とおりである．Harris-FKG 不等式から以下が得られた：

$$\nu_\lambda(\bullet|\bullet) \geq \nu_\lambda(\bullet),$$
$$\nu_\lambda(\circ|\circ) \geq \nu_\lambda(\circ).$$

さらに，BFKL 不等式より，

$$\nu_\lambda(\circ|\circ\circ) \geq \nu_\lambda(\circ|\circ).$$

一方，予想 7.2 で $m=n=1$ としたときの不等式は，注 7.2 で指摘したように，

$$\nu_\lambda(\bullet)\nu_\lambda(\bullet\bullet\bullet) \leq \nu_\lambda(\bullet\bullet)^2,$$

即ち，

$$\nu_\lambda(\bullet|\bullet\bullet) \leq \nu_\lambda(\bullet|\bullet).$$

興味深いのは，上式の不等式の不等号の向きが他の 3 つの不等式の不等号の向きと逆向きになっていることである．つまり，病人は健康人ほど集まりやすくない．これは，自然治癒過程の効果が現れていると解釈できる．また，我々のモンテカルロ・シミュレーションの結果は，最後の不等式も成立していることを示唆している [43].

さて，Holley-Liggett 法の第 1 近似に対応する次の定理を得ることができる．詳細は，Konno [16] の第 4 章を参照のこと．

定理 7.5. 任意の $m,n \geq 1$ に対して，次の相関不等式を仮定する．

$$\nu_\lambda(\bullet)\nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{m}\bullet\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n}) \leq \nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{m}\bullet)\nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n}\bullet).$$

このとき，以下の結果を得る．

$$\lambda_c \leq \lambda_c^{(HL,1)} = 2,$$
$$\rho_\lambda \geq \rho_\lambda^{(HL,1)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\lambda}} \quad (\lambda \geq 2).$$

上の定理の $\lambda_c^{(HL,1)}$ と $\rho_\lambda^{(HL,1)}$ はまさに Holley-Liggett 法の第 1 近似と一致している．

7.2.2. 第 2 近似

前節と同様に，Holley-Liggett 法の第 2 近似に対応する結果を紹介する．

定理 7.6. $\lambda \geq \lambda_c$ に対して，以下（及びここでは省略するが多少煩雑な条件）を仮定する．

$$\nu_\lambda(\circ\bullet)\nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{m}\bullet\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n}) \leq \nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{m}\bullet\circ)\nu_\lambda(\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n}\bullet) \quad (m,n \geq 1),$$

このとき，*Holley-Liggett* 法の第 2 近似で現れた $\lambda_c^{(HL,2)}$ と $\rho_\lambda^{(HL,2)}$ が得られる．

第 8 章　相関不等式法の問題点と課題

今まで紹介してきた，この強力な相関不等式法にも今後の課題として幾つかの問題点が存在する．それを述べる前に，コンタクト・プロセスが相関不等式法（特に，BFKL 不等式）になじむ理由について考えてみよう．実は少なくとも以下３つの理由が存在する．

第１は，コンタクト・プロセスが吸収的という性質を持っていることである．この性質は，健康な人は周りに病人が多いほど感染しやすいという性質である．磁性体のモデルをご存知の方は，「強磁性」に対応する性質である．

第２は，コンタクト・プロセスが $\{0,1\}$ という２状態をとるプロセスであること．従って，$\{0,1,2\}$ のように３状態やそれ以上の状態数をとるモデルに対しては、残念ながら上記に対応する相関不等式はほとんど知られていない．例えば，多状態の無限粒子系は，多種生物が存在する生態系の環境問題とも密接に関係し，ある種の絶滅確率が評価できることは，非常に重要だと考えられる．

第３は、コンタクト・プロセスは一旦全ての格子点で健康な人になってしまうと，それ以降ずっと健康な人だけの世界になるという性質である（この性質により，詳細釣り合いの条件を満たさず，全てが健康人であるという以外の，自明でない定常分布の形の見当がつかない）．

以上のことを考慮しつつ，相関不等式法の課題，及びそれに対する最近の我々の研究について述べてみたい．相関不等式法の今後の課題としては，特に上記の２つの性質「吸収的」,「２状態」のいずれかの性質が欠けたときに，相関不等式が成立するのか，ということである．

まず第１番目の吸収的という性質に関連して，２つの不等式（Harris-FKG 不等式と BFKL 不等式）が非吸収的な場合でも成立するのか，検討中である．具体的には，離散時間の確率セルオートマトン（「Domany-Kinzel モデル」とも呼ばれる）において，特別な A，$B(\subset 2\mathbf{Z})$（例えば $A=\{0\}$，$B=\{2\}$ や，$A=\{-2,0\}$，$B=\{0,2\}$）の場合に，モンテカルロ・シミュレーションを行っている．その結果，Harris-FKG 不等式の場合は，非吸収的な場合でも成立している可能性が高いことが分かった．一方，BFKL 不等式の場合は現段階では微妙で，どちらとも決められない状況である (Takahashi, Tretyakov and Konno [44])．

また，Harris の補題を用いる議論によっても，非吸収的な場合すらある種の Harris-FKG 不等式の成立は示唆されることが分かっている（Konno [45]）．

個人的には，今まで Harris-FKG 不等式や BFKL 不等式は，吸収的な場合にのみ成り立つようなイメージを持っていた．しかし，上記のシミュレーションの結果などを検討すると，どうもそうではなく，もっと一般に非吸収的な場合でも成立するようである．むしろ，成立するための条件として重要なのは，コンタクト・プロセスの場合には，伝染過程に対応する，隣りに粒子を生成するルールの存在の方である可能性が強い．

第２番目の多状態の場合にどうなるかということに関連して，最近我々は２次元格子上の３状態のサイクリック系や植生遷移モデル（共に非吸収的モデル）に対する Harris-FKG タイプの不等式や BFKL タイプの不等式についても，モンテカルロ・シミュレーションを中心に研究を始めている．いずれの場合も，同種が集まりやすいという意味で，両タイプの不等式は成立しているようである (Urano, Konno and Sato [46]，Kawahigashi, Konno and Sato [47])．

以上のような，非吸収的や多状態の場合にも，Harris-FKG タイプの不等式や BFKL タイプの不等式を証明することは，今後の課題である．

第９章　終わりに

本解説では，特にコンタクト・プロセスに絞って，その相関不等式法の概略，及び「ペア近似」との関係について解説を行った．

前の章でも述べたが，相関不等式法の今後の課題としては，

１）非吸収的な無限粒子系

２）多状態無限粒子系

に関する相関不等式の成立・不成立に関して決着をつけることが第一にあげられる．

また，吸収的な場合に，Liggett [48] が導入した total positivity の概念に基づき，BFLK 不等

式を拡張した不等式が成立するかについては，興味をそそる問題である．また，２次元正方格子上の３状態のジャンケン・モデルの場合には，モンテカルロ・シミュレーションの結果は漸近安定であるが，ペア近似（不安定）が平均場（中立安定）に比べ良い近似を与えないという興味深い報告もある[49,50]．これに関連して，第３近似，第４近似に対応する（空間構造を考えない）場合の漸近安定性については Itoh の結果がある [51-54]．

このように，無限粒子系の相関不等式（及び近似）の研究には，数理生物学と密接にかかわる重要な未解決問題が多数あるので，本稿を機会に多くの研究者がこれらの問題に興味を持って頂ければ本望である．

参考文献

[1] Liggett, T.M., Interacting Particle Systems, Springer-Verlag, New York, 1985.

[2] Durrett, R., Lecture Notes on Particle Systems and Percolation, Wadsworth, Inc., California, 1988.

[3] Durrett, R. Ten Lectures on Particle Systems, (St. Flour Lecture Notes, 1993) Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol.1608, 1995.

[4] Schinazi, R.B., Classical and Spatial Stochastic Processes, Birkhäuser, Boston, 1998.

[5] Liggett, T.M., Stochastic Interacting Systems - Contact, Voter, and Exclusion Processes, Springer-Verlag, New York, 1999.

[6] Marro, J., and Dickman, R., Nonequilibrium Phase Transitions and Critical Phenomena, Cambridge University Press, 1999.

[7] 佐藤一憲, 生態学における格子モデル－ペア近似の有効性, 日本生態学会誌, 45(1995),247-258.

[8] 巌佐庸, 生態学における格子モデル, 日本物理学会誌, 53(1998),319-326.

[9] Harris, T.E., Contact interactions on a lattice, Annals of Probability, 2(1974),969-988.

[10] Bezuidenhout, C., and Grimmett, G., The critical contact process dies out. Annals of Probability, 18(1990),1462-1482.

[11] Ziezold, H., and Grillenberger, C., On the critical infection rate of the one-dimensional basic contact process: numerical result, Jounal of Applied Probability, 25(1988),1-15.

[12] Holley, R. and Liggett, T. M., The survival of contact processes, Annals of Probability, 6(1978),198-206.

[13] Liggett, T.M., Improved upper bounds for the contact process critical value, Annals of Probability, 23(1995),697-723.

[14] Konno, N., and Katori, M., Application of the CAM based on a new decoupling procedure of correlation functions in the one-dimensional contact process, Journal of the Physical Society of Japan, 59(1991),1581-1592.

[15] Jensen, I., Low-density series expansions for directed percolation on square and triangular lattices, Jouranal of Physics A, 29(1996),7013-7040.

[16] Konno, N., Phase Transitions of Interacting Particle Systems, World Scientific, Singapore, 1994.

[17] Konno, N., Lecture Notes on Harris Lemma and Particle Systems, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1996.

[18] Konno, N., Lecture Notes on Interacting Particle Systems, Rokko Lectures in Mathematics, No.3, Kobe University, March 1997.

[19] Konno, N., Correlation inequalities and particle systems, Proceedings of Percolation Theory and Particle Systems '96,(1997),89-111.

[20] 今野紀雄, 無限粒子系の数理－コンタクトプロセスの相転移現象, トライボロジスト, 43(1998),696-701.

[21] 今野紀雄, 新しいタイプの相関不等式による無限粒子系の解析, 応用数理, (2000).
[22] 今野紀雄, 確率モデルって何だろう（ダイヤモンド社, 1995）.
[23] 香取眞理, 複雑系を解く確率モデル（講談社ブルーバックス, 1997）.
[24] 今野紀雄, 図解雑学 複雑系（ナツメ社, 1998）.
[25] 今野紀雄, 図解雑学 確率モデル（ナツメ社, 2000）.
[26] Harris, T. E., A correlation inequality for Markov processes in partially ordered state spaces. Annals of Probability, 5(1977),451-454.
[27] Fortuin, C. M., Kasteleyn, P. W., and Ginibre, J., Correlation inequalities on some partially ordered sets, Communications in Mathematical Physics, 22(1971),89-103.
[28] Konno, N., and Katori, M., Applications of the Harris-FKG inequality to upper bounds for order parameters in the contact processes, Journal of the Physical Society of Japan, 60(1991),430-434.
[29] Katori, M., and Konno, N., An upper bound for survival probability of infected region in the contact processes, Journal of the Physical Society of Japan, 60(1991),95-99.
[30] Katori, M., and Konno, N., Three-point Markov extension and an improved upper bound for survival probability of the one-dimensional contact process, Journal of the Physical Society of Japan, 60(1991),418-429.
[31] Katori, M., and Konno, N., Upper bounds for survival probability of the contact process, Journal of Statistical Physics, 63(1991),115-130.
[32] Harris, T.H., On a class of set-valued Markov processes, Annals of Probability, 4(1976),175-194.
[33] Belitsky, V., Ferrari, P.A., Konno, N., and Liggett, T.M., A strong correlation inequality for contact processes and oriented percolation, Stochastic Processes and their Applications, 67(1997),213-225.
[34] Harada, Y., Ezoe, H., Iwasa, Y., Matsuda, H., and Sato, K., Population persistence and spatially limited social interaction. Journal of Theoretical Biology, 48(1995),65-91.
[35] Domany, E., and Kinzel, W., Equivalence of cellular automata to Ising models and directed percolation, Physical Revew Letters, 53(1984),311-314.
[36] 今野紀雄, ある無限粒子系の局所性と大域性－ Domany-Kinzel モデルの相転移現象, 数理科学, (1999)10 月号,37-43.
[37] Matsuda, H., Ogita, N., Sasaki, A., and Sato, K., Statistical mechanics of population - the lattice Lotka-Volterra model, Progress of Theoretical Physics, 88(1992),1035-1049.
[38] Schlijper, A. G., On some variational approximations in two-dimensional classical lattice systems, Journal of Statistical Physics, 40(1985),1-27.
[39] 香取眞理, 今野紀雄, Contact Process の定常状態における相転移現象について, 統計数理, 38(1990),243-256.
[40] Konno, N., and Katori, M., Correlation identities for nearest-particle systems and their applications to one-dimensional contact process, Modern Physics Letters B, 5(1991),151-159.
[41] Hayashi, S., and Konno, N., in preparation (2000).
[42] Liggett, T. M., Survival and coexistence in interacting particle systems, Probability and Phase Transition, Kluwer, (1994),209-226.
[43] Tretyakov, A.Y., Belitsky, V., Konno, N., and Yamaguchi, T., Numerical estimation on correlation inequalities for Holley-Liggett bounds, Memoirs of the Muroran Institute of Technology, 48(1998),101-105.
[44] Takahashi, S., Tretyakov, A.Y., and Konno, N., Positive correlation inequalities for nonattractive stochastic cellular automata, Proceedings of International Workshop on Soft Computing in Industry '99,(1999),474-478.
[45] Konno, N., Upper bounds on survival probabilities for a nonattractive model, Journal of the Physical Society of Japan, 66(1997),3751-3755.

[46] Urano, M., Konno, N., and Sato, K., Correlation inequalities for 3-state cyclic advantage model, Proceedings of International Workshop on Soft Computing in Industry '99,(1999),86-91.
[47] Kawahigashi, M., Konno, N., and Sato, K., Correlation inequalities for successional model, Proceedings of International Workshop on Soft Computing in Industry '99,(1999),479-484.
[48] Liggett, T.M., Total positivity and renewal theory, Probability, Statistics and Mathematics: Papers in Honor of Samuel Karlin, Academic Press, (1989), 141-162.
[49] Tainaka, K., Lattice model for the Lotka-Volterra system, Journal of the Physical Society of Japan, 57(1988),2588-2590.
[50] Tainaka, K., Vortices and strings in a model ecosystem, Physical Review E, 50(1994),3401-3409.
[51] Itoh, Y., An H-theorem for a system of competing species, Proceedings of Japan Academy, 51(1975),374-379.
[52] Itoh, Y., Non-associative algebra and Lotka-Volterra equation with ternary interaction, Nonlinear Analysis, 5(1981)53-56.
[53] Itoh, Y., and Cohen, J. E., Competitive ternary interactions and relative entropy of solutions, Jouranal of Physics A, 27(1994),6383-6393.
[54] Itoh, Y., Competitive four particle interaction and stability of the equilibrium, preprint (1999).

(1999 年 11 月 30 日)

進化生態学酒話会講演録(1998年12月～1999年9月)

1998年
12/12　第79回
「湖産巻貝の雑種形成と移入交雑:イタリアのタニシの浮気」
　加藤雅也(西海区水産研究所石垣支所)

1999年
1/30　第80回
「性転換魚のレズビアン産卵:ムダ放卵の進化的背景」
　狩野賢司(東京学芸大学・生物学研究室)

5/15　第81回
「ハバチの進化生態学－寄主植物との関係・生活史・性比－」
　大塚公雄(東京医科歯科大学・生体材料工学研究所)

6/12　第82回
「寄生蜂 Heterospilus の寄主発育段階に応じた性比調節の進化およびその遺伝的背景」
　小林　彩(東京大学院・広域システム科学系・生物学)

7/ 3　第83回
「海産緑藻類における配偶子の行動と異形配偶子接合の進化」
　富樫辰也(北海道大学・理学部附属海藻研究施設)

9/ 4　第84回
「海産腹足類の卵サイズ集団内変異 - 虫や草のように卵を産む巻貝」
　伊藤　健二(農水省農業研究センター・病害虫防除部・線虫害研究室)

世話人:仲岡雅裕(東大海洋研・海洋生物生態)
TEL. 03-5351-6473, FAX. 03-5351-6471
E-mail: nakaoka@ori.u-tokyo.ac.jp
松田裕之(東大海洋研・資源解析)
TEL. 03-5351-6494, FAX. 03-5351-6492
E-mail: matsuda@ori.u-tokyo.ac.jp
・E-mailによるセミナー案内を行っております。ご希望の方は
moriyama@ori.u-tokyo.ac.jp(森山彰久, 東大海洋研)まで E-mailでご一報下さい。
・ホームページ:http://www2.ori.u-tokyo.ac.jp/~ayu/syuwakai/ も開設しております。

大域情報セミナー(GI seminar)1999年記録

◇場所:奈良女子大学理学部G棟G303

●第31回　1999年1月14日(木)2:00pm ～ 3:00pm
Dmitrii O. Logofet (Laboratory of Mathematical Ecology, IFARAN, Moscow, Russia)
"New Generation of Markov-chain Models for Vegetation Dynamics: A Move From Phenology Towards Causation."

●第32回　1999年5月31日(月)3:30pm～5:00pm
武田裕彦(九州大学理学部生物学教室)
「比較社会学としての数理生物学 --- V. Pareto を参照に---」

●第33回　1999年7月15日(木)3:00pm～5:00pm
高津文人(京都大学生態学研究センター)
「安定同位体比測定法を用いた生態解析 - 大型菌類の炭素、窒素安定同位体比を中心に -」
加藤元海(京都大学生態学研究センター)
「カワゲラ幼虫の「腕立て伏せ」行動 --- 流速と腕立て伏せ回数の関係」

●第34回　1999年9月10日(金)11:00am～12:00am
岸　洋一(東京農工大学)
「日本におけるマツガレ問題」

●第35回　1999年10月29日(金)4:10pm～5:10pm
坂井陽一(九州国際大学経済学部)
「ホンソメワケベラのハレム引っ越し戦略　ー　早く雄になるために　ー」

◇問い合わせ先
瀬野裕美　奈良女子大学理学部情報科学科自然情報学講座[2]
〒630-8506　奈良市北魚屋西町
phone & fax. 0742-20-3442
email. seno@ics.nara-wu.ac.jp

編集後記

今回から2年間、6号分のニュースレターの編集を、北海道地区の私たちが担当することになりました。当初、北大水産学部の4名のメンバーで編集局をおおせつかることとなりました。しかしながら、メンバーに本会の活動に深く関わってきた者がいないこともあり、高田氏と原氏の2名に加わっていただきました。

定例となっている企画（シンポジウム関連、修士論文要旨特集、セミナー記録）や、学会参加記、研究室紹介などは、ニュースレターの読者にとって、国内外の数理生物学の日常的現状を知る良い情報源となっていると思います。前編集局の企画、「入門以前」は大変すばらしいものと思います。30号では、前編集局からの提案を受け、横浜国大の今野氏に「無限粒子系の相関不等式とペア近似」という格子空間上の生物（物理）モデルに関する解説を寄稿していただきました。この企画を新編集局でも受け継げればと個人的には考えています。

編集局の移転に当たっては、前編集委員長である静岡大学の佐藤一憲さんには大変お世話になりました。充実した内容を保ってこられた前編集局の成果を継承してゆくよう努力いたします。

次号は、修士論文要旨特集がメインになります。修士論文の作成に励んでいる皆さんの寄稿をお待ちしています。（西村）

ニュースレター編集局
西村欣也（北海道大学水産学部）
kinya@fish.hokudai.ac.jp
菅野泰次（北海道大学水産学部）
kanno@fish.hokudai.ac.jp
岸道郎（北海道大学水産学部）
kishi@salmon.fish.hokudai.ac.jp
松石隆（北海道大学水産学部）
matuisi@fish.hokudai.ac.jp
高田壮則（北海道東海大学国際文化学部）
takada@dc.htokai.ac.jp
原登志彦（北海道大学低温科学研究所）
t-hara@orange.lowtem.hokudai.ac.jp
〒041－8611 函館市港町3－1－1
北海道大学水産学部内
JAMB Newsletter編集局

JAMB Newsletter No. 30

目次

数理生物学懇談会ニュースレター第 30 号
1999 年 12 月発行
〒041-8611　函館市港町 3-1-1
北海道大学水産学部
数理生物学懇談会ニュースレター編集局
印刷・製本　うめだ印刷(株)